Jber. d. Dt. Math.-Verein.
92 (1990) 130–144
AMS subject classification: 05 A 17, 05 C 55, 10 A 45

Quantitative Versionen von kombinatorischen Partitionssätzen*)

P. Frankl**), R. L. Graham und V. Rödl, Murray Hill, NJ

0 Einleitung

Es gibt schon eine sehr große Anzahl von „Ramseyschen Sätzen". Die berühmtesten drei klassischen Sätze sind die folgenden. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

Satz von Schur (1916, [S]). *Man betrachte eine beliebige Partition von $\mathbb{N}$ in endlich viele Klassen. Dann gibt es immer drei Zahlen x, y und z, alle in der gleichen Klasse, für die $x + y = z$ gilt.*

Satz von van der Waerden (1927, [W]). *Für jede Partition von $\mathbb{N}$ in endlich viele Klassen gibt es eine Klasse, die beliebig lange arithmetische Progressionen enthält.*

Für eine Menge X sei $\binom{X}{k}$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von X.

Satz von Ramsey (1930, [Ra]). *Für eine beliebige Partition von $\binom{\mathbb{N}}{k}$ in endlich viele Klassen gibt es eine unendliche Menge X, so daß alle Elemente von $\binom{X}{k}$ in der gleichen Klasse sind.*

Alle diese Sätze kann man auch in einer endlichen Form formulieren. Wir bezeichnen Objekte, die völlig in einer Partitionsklasse liegen, als *monochromatisch*. [N] bezeichne das Intervall $\{1, 2, \ldots N\}$.

Dann lautet die endliche Form des Satzes von Schur: Für jede natürliche Zahl r gibt es eine kleinste Zahl $S = S(r)$ mit der Eigenschaft, daß es für jede Partition von [S] in r Klassen eine monochromatische Menge $\{x, y, x + y\}$ gibt.

---

*) Hauptvortrag auf der DMV-Tagung in Berlin 1987.

**) Ständige Adresse: CNRS, 15 Quai Anatole France, 75007 Paris, Frankreich.

Für den Satz von van der Waerden (bzw. Ramsey) sei $W(l,r)$ (bzw. $R(m,k;r)$) die entsprechende Funktion, wobei r die Anzahl von Klassen ist, l die Länge der gewünschten arithmetischen Progression und m die Mächtigkeit der Menge, deren k-elementige Teilmengen monochromatisch sein sollen.

Man weiß sehr wenig über diese Funktionen; zum Beispiel war es 60 Jahre lang nicht bekannt, ob man eine primitiv rekursive obere Schranke für $W(k,2)$ angeben kann. Für einen Überblick über diese und verwandte Funktionen verweisen wir den interessierten Leser auf die Arbeit [GR]. In einer wunderschönen neuen Arbeit hat Shelah [Sh] eine primitiv rekursive obere Schranke für $W(k,2)$ erzielt.

Im Zentrum unseres Interesses steht eine andere quantitative Version dieser Sätze: Wir betrachten alle Parameter (r,l,m,k) als konstant und lassen N wachsen. Dabei möchten wir die Mindestanzahl monochromatischer Objekte abschätzen. Wir beweisen, daß diese Anzahl höchstens um einen konstanten Faktor kleiner als die Anzahl *aller* Objekte sein kann.

Schließlich betrachten wir einen anderen Begriff von Anzahl, der durch einen Satz von Bergelson [B] motiviert wurde. Bergelson bewies seinen Satz mit ergodentheoretischen Mitteln. Wir geben einen rein kombinatorischen Beweis für diesen und andere Sätze.

1 Der Satz von Rado

Im Jahre 1930 hat Richard Rado einen allgemeinen Satz veröffentlicht, der sowohl den Satz von Schur als auch den von van der Waerden enthält. Man kann hier erwähnen, daß diese schöne Arbeit die Basis seiner Dissertation wurde, die er unter der Leitung von Schur geschrieben hat.

Sei $A=(a_{ij})$ eine ganzzahlige $l\times k$-Matrix. Man betrachte das homogene lineare Gleichungssystem $\mathscr{L}$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l.$$

Sei $\vec{x}$ der Spaltenvektor $(x_1,\ldots,x_k)^{\mathrm{T}}$. Dann kann man das System als

$$A\vec{x}=\vec{0}$$

schreiben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß A vollen Rang hat, das heißt $r(A)=l$ gilt und deswegen der lineare Raum von Lösungen die Dimension $k-l$ hat.

Definition 1.1. *Man sagt, daß das System* $\mathscr{L}=\mathscr{L}(A)$ partitionsregulär *ist, falls für jede beliebige Partition von* $\mathbb{N}$ *in endlich viele Klassen das System eine monochromatische Lösung hat.*

Bezeichne $\vec{a}_j$ die j-te Spalte von A.

Definition 1.2. *Man sagt, daß die Matrix A die Spaltenbedingung erfüllt, falls es nach entsprechender Permutation der Spalten Indizes* $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_t = k$

gibt, so daß mit der Bezeichnung

$$A_i := \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} \bar{a}_j$$

gilt:

(i) $A_1 = \bar{0}$,

(ii) *für* $2 \leqslant i \leqslant t$ *ist* A_i *eine lineare Kombination von* $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{k_{i-1}}$.

Jetzt können wir das klassische Resultat von Rado beschreiben.

Satz von Rado ([R], cf. auch [GRS]). *Das System* $\mathscr{L}(A)$ *ist partitionsregulär dann und nur dann, wenn* A *die Spaltenbedingung erfüllt.*

Im Fall des Satzes von Schur ist $A = (1, 1, -1)$, was nach Permutation $(1, -1, 1)$ ergibt und die Spaltenbedingung mit $t = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ erfüllt.

Für den Satz von van der Waerden kann man für $\mathscr{L}(A)$ das System

$$\begin{array}{llll} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ & \vdots & & \\ x_{l-2} & -2x_{l-1} & +x_l & = 0 \end{array}$$

nehmen, welches die Spaltenbedingung mit $t = 1$ erfüllt. Das zeigt, daß der Satz von Rado die Sätze von Schur und van der Waerden verallgemeinert.

Rado nennt eine Menge $H \subset \mathbb{N}$ *riesig*, wenn es für jedes partitionsreguläre System und jede endliche Partition von H eine monochromatische Lösung gibt. Rado hat vermutet und Deuber [D] hat bewiesen, daß riesige Mengen die *Partitionseigenschaft* haben, das heißt, daß es für eine beliebige endliche Partition $H = H_1 \cup \ldots \cup H_r$ ein j mit $1 \leqslant j \leqslant r$ gibt, so daß H_j wiederum riesig ist. Für den Beweis von Deuber spielt der folgende Begriff eine wichtige Rolle.

Für natürliche Zahlen m, p und c sei

$$D(m, p, c) := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^m : \exists i, i < m,$$
$$\lambda_j = 0 \text{ für } j < i;\ \lambda_i = c;\ |\lambda_j| \leqslant p \text{ für } j > i\}.$$

Definition 1.3. *Eine Menge* $S \subset \mathbb{Z}$ *ist eine* (m, p, c)-Menge, *falls es* $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{Z}^m$ *gibt, so daß*

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i : (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in D(m, p, c) \right\}$$

gilt.

Wie Deuber gezeigt hat, sind (m, p, c)-Mengen und die Lösungen von partitionsregulären Gleichungssystemen sehr eng verbunden. Man betrachte eine Matrix A, die die Spaltenbedingung erfüllt. Dann hat man $k - l$ linear unabhängige Lösungen der folgenden Form:

$$\begin{array}{lllllll}
 & & \overset{1}{\cup} & \overset{k_1}{\cup} \ \ldots & \overset{k_2}{\cup} & \overset{k_{t-1}}{\cup} & \overset{k_t}{\cup} \\
\bar{w}_1 & = & (1, 1, \ldots, 1, & 0, \ldots, 0, \ldots & & 0, & 0, \ldots, 0) \\
\bar{w}_2 & = & (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2k_1}, & 1, \ldots, 1, & 0, \ldots & 0, & 0, \ldots, 0) \\
\vdots & & & & & & \\
\bar{w}_t & = & (\alpha_{t1}, \ldots, \alpha_{tk_1}, & & \ldots, & \alpha_{tk_{t-1}}, & 1, \ldots, 1) \\
\bar{w}_{t+1} & = & (\alpha_{t+1,1} \ldots & & & \ldots, & \alpha_{t+1,k}\ ) \\
\vdots & & & & & & \\
\bar{w}_{k-l} & = & (\alpha_{k-l,1} \ldots & & & \ldots, & \alpha_{k-l,k}\ ),
\end{array}$$

wo alle α_{ij} rationale Zahlen sind. Falls man alle diese Vektoren durch das kleinste gemeinsame Vielfache c aller Nenner multipliziert, erhält man ganzzahlige Vektoren der Form

$$\begin{array}{llll}
\bar{v}_1 & = & (c, c, \ldots, c, 0, 0, \ldots & \ldots, 0, \ldots, 0) \\
\bar{v}_2 & = & (\beta_{21}, \ldots, \beta_{2k_1}, c, c, \ldots & \ldots, 0, \ldots, 0) \\
\vdots & & & \\
\bar{v}_{t+1} & = & (\beta_{t+1,1}, \ldots & \ldots, \beta_{t+1,k}\ ) \\
\vdots & & & \\
\bar{v}_{k-l} & = & (\beta_{k-l,1}, \ldots & \ldots, \beta_{k-l,k}\ ).
\end{array}$$

Sei $p = \max |\beta_{ij}|$. Eine beliebige Lösung des Systems $A\bar{x} = \bar{0}$ kann man in der Form

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k-l} y_i \bar{v}_i$$

schreiben (hier können die y_i beliebig, das heißt nicht notwendig ganzzahlig sein). Das bedeutet aber, daß $x_1, \ldots, x_m$ alle zu der gleichen $(k-l, p, c)$-Menge gehören.

Andererseits enthält jede $(k-l,\ p, c)$-Menge eine Lösung des Systems $A\bar{x} = \bar{0}$.

Nun können wir unseren ersten Satz beweisen.

Satz 1.1. *Sei A eine ganzzahlige $l \times k$-Matrix, die die Spaltenbedingung erfüllt. Dann gibt es für jedes $r \geqslant 1$ eine positive reelle Konstante $c = c_r(A)$, so daß für jedes $N > n_0(A, r)$ und jede Partition von* [N] *in r Klassen das System $A\bar{x} = \bar{0}$ mindestens cN^{k-l} monochromatische Lösungen hat.*

Sei $v_{\mathscr{L}}(N)$ die Anzahl von Lösungen des Systems $\mathscr{L} = \mathscr{L}(A)$ in [N] und $v_{\mathscr{L}}(N, r)$ die Mindestanzahl von monochromatischen Lösungen, falls man [N] in r Klassen aufteilt. Dann hat Satz 1.1 das folgende Korollar.

Korollar. *Falls $\mathscr{L}$ partitionsregulär ist, dann gilt $v_{\mathscr{L}}(N, r) > c_r(\mathscr{L}) v_{\mathscr{L}}(N)$ für eine positive Konstante $c_r(\mathscr{L})$ und für jedes $N > n_0(\mathscr{L}, r)$.*

Für den Beweis benötigen wir die folgende Version von dem Satz von Deuber.

Satz 1.2 ([D]). *Für beliebige natürliche Zahlen m, p, c und r gibt es natürliche Zahlen M, P und C, so daß man für jede Partition aller formalen Linearkombinationen*

$$\mathscr{I} = \left\{ \sum_{i=1}^{M} \lambda_i Y_i \colon (\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \in D(M, P, C) \right\}$$

in r Klassen paarweise disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_m \subseteq [M]$ *findet und formale Variablen*

$$(1.1) \qquad y_i = \sum_{j \in B_i} \xi_j Y_j, \qquad 1 \leqslant |\xi_j| \leqslant P,\ 1 \leqslant i \leqslant m$$

so daß alle Linearkombinationen

$$\sum_{i=1}^{M} \lambda_i y_i, \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in D(m, p, c)$$

in der gleichen Partitionsklasse sind.

Beweis von Satz 1.1: Wie vorher gezeigt wurde, erhält für entsprechende p und c jede $(k-l, p, c)$-Menge eine Lösung des Systems $A\bar{x} = \bar{0}$. Sei $m = k - l$ und seien M, P und C die Zahlen im Satz von Deuber. Sei N sehr groß im Vergleich zu M; man betrachte alle M-Tupel $(Y_1, \ldots, Y_m) \in \mathbb{Z}^M$ mit der Eigenschaft, daß die entsprechende (M, P, C)-Menge ausschließlich aus Zahlen in [N] besteht und

$$(1.2) \qquad Y_i \equiv (2P+1)^i \bmod (2P+1)^M, \qquad 1 \leqslant i \leqslant M$$

gilt. Für eine positive Zahl $c_1 = c(M, P, C)$ gibt es mindestens $c_1 N^M$ solcher M-Tupel $(Y_1, \ldots, Y_M)$.

Man betrachte eine beliebige Partition von [N] in r Klassen. Diese Partition definiert eine Partition der Menge $\mathscr{I} = \mathscr{I}(Y_1, \ldots, Y_M)$ nach dem Satz von Deuber. Da unseren Annahmen entsprechend $\mathscr{I}$ als Zahlenmenge in [N] enthalten ist, erhalten wir – durch Anwendung des Satzes von Deuber – eine monochromatische Lösung innerhalb $\mathscr{I}$. Das heißt, mit Multiplizität gerechnet haben wir mindestens $c_1 N^M$ monochromatische Lösungen.

Um den Beweis zu beenden, werden wir zeigen, daß wir jede Lösung höchstens $c_2 N^{M-(k-l)}$-mal gezählt haben. Sei also $(x_1, \ldots, x_k)$ eine Lösung, die wir auf die obige Weise erhalten haben. Das bedeutet, daß für eine entsprechende Wahl von $(y_1, \ldots, y_{k-l})$

$$(x_1, \ldots, x_k) = (y_1, \ldots, y_{k-l}) B$$

gilt, wobei B eine festgelegte $(k-l) \times k$-Matrix ist. Deswegen bestimmt $(y_1, \ldots, y_{k-l})$ eindeutig $(x_1, \ldots, x_k)$. Das heißt, wir müssen beweisen, daß ein gegebenes $(k-l)$-Tupel $(y_1, \ldots, y_{k-l})$ höchstens $c_2 N^{M-(k-l)}$-mal erhalten wurde. Wegen der Bedingung (1.2) bestimmt jedes y_i eindeutig durch seinen Rest modulo $(2P+1)^M$ die Menge B_i und die Koeffizienten ξ_j aus (1.1). Das ergibt zusammen $k - l$ Gleichungen für die Y_j (und diese Gleichungen haben paarweise disjunkte Variablenmengen), was nur $c_2 N^{M-(k-l)}$ Möglichkeiten für die Wahl von $(Y_1, \ldots, Y_M)$ übrigläßt. ■

2 Der Satz von Szemerédi

Für eine Teilmenge $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ bezeichne $\bar{d}(A)$ die *obere Dichte* von A, das heißt

$$\bar{d}(A) = \limsup_{n \to \infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n}.$$

Ähnlich wird die *untere Dichte* $\underline{d}(A)$ definiert:

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n \to \infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n}.$$

Falls $\bar{d}(A)$ gilt, dann heißt diese Größe die *Dichte von A* und wird mit $d(A)$ bezeichnet.

Man kann sich fragen, welche Gleichungssysteme $M\vec{x} = \vec{0}$ in jeder Menge A mit positiver oberer Dichte nichttriviale Lösungen haben (nichttrivial besagt, daß nicht $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$ gilt). Man setze $\vec{1} = (1, \ldots, 1)$. Falls $M\vec{1} \neq \vec{0}$ und $m > m_0(M)$ gilt, dann kann man leicht sehen, daß die Menge $\{1, m+1, 2m+1, \ldots\}$ die Dichte $1/m$ hat und trotzdem keine Lösung des Systems $M\vec{x} = \vec{0}$ enthält. Andererseits gilt folgendes.

Satz 2.1. *Sei $M\vec{x} = \vec{0}$ ein ganzzahliges lineares Gleichungssystem, das die Bedingung $M\vec{1} = \vec{0}$ erfüllt. Dann enthält jede Teilmenge positiver oberer Dichte von $\mathbb{N}$ eine nichttriviale Lösung dieses Systems.*

Im Spezialfall, wo M das System $x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \ldots = x_{k=1} - x_k$ bezeichnet, ist der obige Satz gleichwertig mit dem berühmten Satz von Szemerédi [Sz]. Andererseits kann man den Satz leicht aus diesem Spezialfall herleiten.

Wir haben die folgende quantitative Version des Satzes 2.1 bewiesen. Sei $c(M, \gamma, n)$ die Mindestanzahl von Lösungen des Systems $M\vec{x} = \vec{0}$ in allen Mengen $A \subset [1, n]$ mit $|A| > \gamma n$.

Satz 2.2 ([FRG1]). *Sei M eine $k \times l$-Matrix mit $M\vec{1} = \vec{0}$. Dann gilt*

$$\liminf_{n \to \infty} c(M, \gamma, n)/n^{k-l} > 0.$$

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem Satz von Fürstenberg und Katznelson [FK], welcher eine weitgehende Verallgemeinerung des Satzes von Szemerédi (mit ergodentheoretischen Mitteln) ist.

3 Der Satz von Bergelson

Zuerst wollen wir einen einfachen Hilfssatz beweisen.

Lemma 1. *Sei $C = \{c_1, \ldots, c_n, \ldots\}$ eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen von oberer Dichte $\bar{d}$. Dann gilt folgendes.*

(i) Für jede endliche Zahlenmenge $A \subset \mathbb{N}$ mit $\bar{d} + 1/|A| > 1$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n + A = \{n + a : a \in A\} \subset C$.

(ii) Sei $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ *und* $k \geqslant 4\bar{d}/\varepsilon^2$*. Dann gibt es Indizes* $1 \leqslant i < j \leqslant k$*, für die*

$$\bar{d}((b_i + C) \cap (b_j + C)) \geqslant \bar{d}^2 - \varepsilon$$

gilt.

Beweis: (i) Sei $A = \{a_1, \ldots, a_t\}$ und $a = \max_i a_i$. Wegen der Bedingung $\bar{d} > 1 - 1/|A|$ gibt es für jede ganze Zahl m eine ganze Zahl $n(m)$, so daß

$$|C \cap [m, n(m)]| > (1 - 1/|A|)n(m) + a \tag{3.1}$$

gilt. Man betrachte

$$S_i = \{n \in [m, n(m)] : a_i + n \notin C\}.$$

Aus (3.1) folgt

$$|S_i| < (n(m) - m)/|A|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant t.$$

Das heißt

$$|S_1| + \ldots + |S_t| < n(m) - m.$$

Wir können deswegen ein $n \in ([m, n(m)] - \bigcup_{i=1}^{t} S_i)$ finden. Für dieses n gilt dann $n > m$ und $n + A \subset C$, was (i) beweist.

(ii) Aus der Definition der oberen Dichte folgt, daß es beliebig große Zahlen m gibt, so daß

$$|C \cap [1, m]| > \left(\bar{d} - \frac{\varepsilon}{2}\right)m + \max_i b_i.$$

Für solche m haben wir

$$|(b_i + C) \cap [1, m]| > \left(\bar{d} - \frac{\varepsilon}{2}\right)m. \tag{3.2}$$

Wir setzen $B_i = (b_i + C) \cap [1, m]$ und betrachten den Hypergraphen $\{B_1, \ldots, B_k\}$. Sei $g(i)$ der Grad des Punktes i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Dann gilt

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} |B_i \cap B_j| = \sum_{1 \leqslant t \leqslant m} \binom{g(t)}{2} \geqslant m \binom{\Sigma\, g(i)/m}{2}. \tag{3.3}$$

Aus (3.2) und (3.3) erhält man für $k \geqslant 4\bar{d}/\varepsilon^2$

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} |B_i \cap B_j| \geqslant m \binom{k\left(\bar{d} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{2} > m \binom{k}{2} (\bar{d}^2 - \varepsilon).$$

Das heißt, daß im Durchschnitt $|B_i \cap B_j|/m$ größer als $\bar{d}^2 - \varepsilon$ ist. Für m gibt es unendlich viele mögliche Werte, während (i, j) nur $\binom{k}{2}$ Werte annehmen kann. Deswegen muß es ein Paar (i, j) geben, so daß $|B_i \cap B_j| > m(\bar{d}^2 - \varepsilon)$ für unendlich viele Werte von m gilt. ∎

Sei $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_l$ eine Partition. Der Satz von Schur sagt, daß es ein i mit $1 \leqslant i \leqslant l$ und ein $n \in C_i$ gibt, so daß $C_i \cap (n + C_i) \neq \emptyset$ gilt. Mit ergodentheoretischen Mitteln hat Bergelson den folgenden schärferen Satz bewiesen.

Der Satz von Bergelson ([B]). *Sei $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_l$ eine Partition. Dann gibt es ein t mit $1 \leqslant t \leqslant l$, so daß $\bar{d}(C_t) > 0$ ist und für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge*

$$D_t = \{n \in C_t : \bar{d}(C_t \cap (C_t + n)) \geqslant \bar{d}(C_t)^2 - \varepsilon]$$

eine positive obere Dichte hat.

Jetzt geben wir einen elementaren Beweis dieses Satzes. Der Beweis ist indirekt, das heißt wir nehmen an, daß $\bar{d}(D_i) = 0$ gilt für $1 \leqslant i \leqslant l$. Wir bemerken, daß $D_i = C_i$ ist für jedes i mit $\bar{d}(C_i) = 0$. Man setze $C = \mathbb{N} - \bigcup_{i=1}^{l} D_i$. Dann gilt $\bar{d}(C) = 1$.

Sei nun $k = \lceil 4/\varepsilon^2 \rceil$ und $r = R(k, l)$ die Ramsey-Zahl. Das heißt, für jede Partition der Kanten des vollständigen Graphen mit r Ecken in l Klassen gibt es einen monochromatischen vollständigen Graphen aus k Ecken.

Aus Lemma 1(i) folgt leicht, daß es Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ gibt, so daß für jede nichtleere Teilmenge $I \subset \{1, 2, \ldots, r\}$

$$\sum_{i \in I} a_i \in C \tag{3.4}$$

gilt. Man definiere eine Partition der Kanten des vollständigen Graphen über $\{1, \ldots, r\}$ in l Klassen, in der die Kante (a, b) dann und nur dann in der Klasse i liegt, wenn

$$\sum_{a \leqslant s < b} a_s \in C_i$$

gilt. Aus der Definition von r folgt, daß es ein t mit $1 \leqslant t \leqslant l$ gibt, so daß die t-te Klasse einen vollständigen Graphen mit k Ecken enthält. Sei $\{s_1, \ldots, s_k\}$ die Eckenmenge dieses Graphen mit $1 \leqslant s_1 < \ldots < s_k \leqslant r$. Man setze

$$b_i = \sum_{s_1 \leqslant j < s_i} a_j,$$

und wende Lemma 1(ii) mit $C = C_t$, $\bar{d} = \bar{d}(C_t)$ an. Dann enthält man Indizes $1 \leqslant i < j \leqslant k$ mit

$$\bar{d}((b_i + C) \cap (b_j + C)) > \bar{d}^2 - \varepsilon,$$

oder, was gleichwertig ist,

$$\bar{d}(C_t \cap (C_t + (b_j - b_i))) > \bar{d}^2 - \varepsilon.$$

Das heißt aber, daß das Element $b_j - b_i = \sum_{s_i \leqslant u < s_j} a_u \in C_t$ in D_t liegt. Dies ist ein Widerspruch zu (3.4). ■

4 Eine gemeinsame Verschärfung der Sätze von Schur und van der Waerden

Zuerst werden wir eine modifizierte Definition von (m,p,c)-Mengen geben. Für $m,p,c \in \mathbb{N}$ ist eine $(m,p,c)^+$-Menge die Menge aller Linearkombinationen des folgenden Typs:

$$\{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + c a_i : 0 \leqslant \lambda_i < p,\ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

wobei $a_1, \ldots, a_m$ beliebige natürliche Zahlen sind. Die obige $(m,p,c)^+$-Menge wird durch $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ bezeichnet. Wir werden einen Satz über $(2,p,1)^+$-Mengen beweisen. Die $(2,p,1)^+$-Menge $\langle x,y \rangle$ besteht aus den Zahlen $x, y, y+x, y+2x, \ldots, y+(p-1)x$, das heißt, sie ist die Vereinigung von einem Lösungssystem der Gleichung von Schur $(x+y=z)$ und einer arithmetischen Folge der Länge p.

Sei $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$ und seien $M,P,C \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß jede Partition einer $(M,P,C)^+$-Menge in r Klassen eine monochromatische $(2,p,1)^+$-Menge enthält (die Existenz von M,P,C folgt aus dem Satz von Deuber [D]).

Satz 4.1. *Sei* $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ *eine beliebige Partition,* $p > 2$, $\delta = 1/2(1+C)^M p^{\binom{M}{2}}$. *Man setze*

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \bar{d}\{y : \langle x, y \rangle \text{ ist monochromatisch}\} \leqslant \delta\}.$$

Dann gilt

(4.1) $\bar{d}(B) < 1 - \delta$.

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß (4.1) falsch ist. Man setze $B_1 = \{b \in B : \langle b \rangle \subset B\} = \{b \in B : Cb \in B\}$. Dann gilt

(4.2) $1 - \bar{d}(B_1) \leqslant (1 + C)(1 - \bar{d}(B)) \leqslant (1 + C)\delta < 1.$

Sei $a_1 \in B_1$. Wir werden neue Mengen B_i und Elemente $a_i \in B_i$ rekursiv definieren. Nehmen wir an, daß $a_1, a_2, \ldots, a_i \in B_i$ schon definiert sind und $\langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ keine monochromatische $(2,p,1)^+$-Menge enthält.

Man setze $A = \left\{ \sum_{j \leqslant i} \lambda_j a_j : 0 \leqslant \lambda_j < P \right\}$ und

$$B_{i+1} = \{b \in B_i : (A + Cb) \subset B_i\}.$$

Dann sieht man leicht ein, daß

$$(4.3)\quad 1-\bar{d}(B_{i+1}) \leqslant (1+C|A|)(1-\bar{d}(B_i))$$

gilt. (4.2) und (4.3) ergeben

$$(4.4)\quad 1-\bar{d}(B_{i+1}) \leqslant \delta \prod_{0\leqslant j\leqslant i} (1+CP^j).$$

Nun wählt man ein $a_{i+1}\in B_{i+1}$, so daß $\langle a_1,\ldots,a_{i+1}\rangle$ immer noch keine monochromatische $(2,p,1)^+$-Menge enthält. Wenn es so ein a_{i+1} nicht mehr gibt, halten wir an. Nach dem Satz von Deuber wird das für $i+1\leqslant M$ passieren. Dann enthält die $(i+1,P,C)^+$-Menge $\langle a_1,\ldots,a_i,b\rangle$ für jedes $b\in B_{i+1}$ eine monochromatische $(2,p,1)^+$-Menge, sagen wir $\langle x(b),y(b)\rangle$.

Sei $b>P(a_1+\ldots+a_i)$. Dann ist $Cb+(P-1)(a_1+\ldots+a_i)<(1+C)b$ die größte Zahl in der Menge $\langle a_1,\ldots,a_i,b\rangle$. Da $p>2$ gilt, enthält $\langle x(b),y(b)\rangle\subset\langle a_1,\ldots,a_i,b\rangle$ das Element $y(b)+2x(b)$, woraus $x(b)<Cb$ folgt, so daß $x(b)\in\langle a_1,\ldots,a_i\rangle$ gilt. Da $\langle a_1,\ldots,a_i\rangle$ keine monochromatische $(2,p,1)^+$-Menge enthält, ist $y(b)\notin\langle a_1,\ldots,a_i\rangle$. Das heißt, daß $y(b)=Cb+\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_ia_i$ gilt. Sei $x(b)=\mu_1a_1+\ldots+\mu_ia_i$. Man setze

$$\lambda(b)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_i),\ \mu(b)=(\mu_1,\ldots,\mu_i).$$

Die Anzahl von Möglichkeiten für $\lambda(b)$ ist P^i, und für $\mu(b)$ ist sie $P^{i-1}+P^{i-2}+\ldots+P+1$. Das ergibt insgesamt $P^i(P^i-1)/(P-1)<P^{2M-2}$ Möglichkeiten. Deswegen gibt es eine Wahl $\vec{\lambda},\vec{\mu}$, so daß die Menge $B^*=\{b\in B_{i+1}:\lambda(b)=\vec{\lambda},\mu(b)=\vec{\mu}\}$ die Eigenschaft

$$(4.5)\quad \bar{d}(B^*)>\bar{d}(B_{i+1})/P^{2M-2}$$

hat. Da $x(b)\in B$, erhält man

$$\bar{d}\{y(b):b\in B^*\}\leqslant\delta.$$

Aus $y(b)<(1+C)b$ folgt dann

$$\bar{d}(B^*)<(1+C)\delta.$$

Wenn man diese Ungleichung mit (4.5) und (4.4) vergleicht, erhält man $(i+1\leqslant M)$

$$1\leqslant\delta(1+C)P^{2M-2}+\prod_{0\leqslant j<M}(1+CP^j)<2\delta(1+C)^MP^{\binom{M}{2}},$$

das heißt $\delta>1/2(1+C)^MP^{\binom{M}{2}}$, in Widerspruch zu unseren Annahmen. ■

Bemerkungen. Unser Satz ist stärker als der Satz von Bergelson (sogar für den Fall der Lösungen der Gleichung von Schur) in dem Sinne, daß wir von der Menge

$$\bar{B}=\mathbb{N}-B=\{x\in\mathbb{N}:\bar{d}\{y:\langle x,y\rangle \text{ ist monochromatisch}\}>\delta\}$$

die Ungleichung $\underline{d}(\bar{B}) \geqslant \delta$ bewiesen haben. Das heißt, wir haben eine untere Schranke für die *untere* Dichte einer Menge gegeben.

Man kann Beispiele angeben, die zeigen, daß die Reihenfolge von $\underline{d}$ und $\bar{d}$ nicht verändert werden kann.

5 Eine Verschärfung des Folkman-Rado-Sandersschen Satzes

Eine endliche Menge $A \subset \mathbb{N}$ heißt unabhängig, wenn für alle $2^{|A|}$ Untermengen $A_0 \subset A$ die Teilsummen $\sum_{a \in A_0} a$ verschieden sind. Wir setzen

$$\Sigma A = \left\{ \sum_{a \in A_0} a: \qquad \emptyset \neq A_0 \subset A \right\}.$$

Das heißt, A ist unabhängig dann und nur dann, wenn $|\Sigma A| = 2^{|A|} - 1$.

Satz von Folkman-Rado-Sanders (cf. [G], [GRS]). *Für alle ganzen Zahlen $r, k \geqslant 2$ gibt es ein $n = n(r,k)$, so daß es für jede unabhängige Menge $B \subset \mathbb{N}$ der Mächtigkeit n und jede Partition von ΣB in r Klassen eine unabhängige Menge A der Mächtigkeit k gibt, so daß $\Sigma A \subset \Sigma B$ monochromatisch ist.*

Sei nun $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ eine beliebige Partition von $\mathbb{N}$. Sei δ eine sehr kleine, aber positive Konstante (wir werden den Wert von δ erst später fixieren).

Wir werden für jede unabhängige Menge A mit $|A| \leqslant k-1$ eine Menge $\Gamma(A) \subset \mathbb{N}$ definieren. Für $|A| = k-1$ setzen wir

$$\Gamma(A) = \{x \in \mathbb{N} : A \cup \{x\} \text{ ist unabhängig, } \Sigma A \cup \{x\} \text{ ist monochromatisch}\}.$$

Für $|A| = k-2$ setzen wir

$$\Gamma(A) = \{a_{k-1} \in \mathbb{N} : \bar{d}(\Gamma(A \cup \{a_{k-1}\})) > \delta\}.$$

Allgemein setzen wir für $A = \{a_1, \ldots, a_i\}$ mit $i < k-1$

$$\Gamma(A) = \{a_{i+1} \in \mathbb{N} : \bar{d}(\Gamma(A \cup \{a_{i+1}\})) > \delta\}.$$

Man bemerke, daß $\Gamma(A) = \emptyset$ gilt, falls entweder A nicht unabhängig oder ΣA nicht monochromatisch ist.

Satz 5.1. *Für $\delta < 2^{-n(r,k)k}$ gilt*

(5.1) $\quad \underline{d}(\Gamma(\emptyset)) > \delta.$

Beweis: Der Beweis ist indirekt. Wir nehmen an, daß (5.1) falsch ist. Seien $D_1 = \mathbb{N} - \Gamma(\emptyset)$ und $d_1 \in D_1$, so daß $\bar{d}(\Gamma(d_1)) < \delta$ gilt. Wir werden induktiv Mengen $D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_s \ldots$ und Elemente $d_2 \in D_2, \ldots, d_s \in D_s$ konstruieren, für die (i) und (ii) gelten. Für eine Teilsumme $d = d_{i_1} + \ldots + d_{i_q}$ setzen wir $p(d) = \max_{1 \leqslant v \leqslant q} i_v$.

(i) $d_i > 3d_{i-1}$ für $2 \leqslant i < s$, und es gibt keine unabhängige Menge A mit $|A| = k$ und $\Sigma A \subset \Sigma\{d_1, \ldots, d_s\}$, ΣA monochromatisch.

(ii) für jede Sequenz $b_1, b_2, \ldots, b_q \in \Sigma\{d_1, \ldots, d_s\}$ mit $p(b_1) < p(b_2) < \ldots < p(b_q)$ für $1 \leqslant q \leqslant k-1$ gilt

$$\bar{d}(\Gamma(b_1, \ldots, b_q)) < \delta.$$

Wegen Bedingung (i) kann s nicht größer als $n(r,k)$ aus dem vorigen Satz sein. Sei also s die größte Zahl, für die wir noch D_s und d_s konstruieren können, und setze $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$.

Wegen der Bedingung $d_i > 3d_{i-1}$ ist D unabhängig, und falls $B = \{b_1, \ldots, b_q\}$ mit $b_1 < b_2 < \ldots < b_q$ unabhängig mit $\Sigma B \subset \Sigma D$ ist, dann muß $p(b_1) < p(b_2) < \ldots < p(b_q)$ sein. Insbesondere gilt

$$\bar{d}(\Gamma(b_1, \ldots, b_q)) < \delta.$$

Man setze

$$D_{s+1} = \mathbb{N} - \bigcup_{0 \leqslant q < k} (\cup \{\Gamma(b_1, \ldots, b_q) : p(b_1) < \ldots < p(b_q), \Sigma\{b_1, \ldots, b_q\} \subset \Sigma D\}).$$

Dann hat man

$$\underline{d}(D_{s+1}) \geqslant 1 - (2^s)^{k-1}\delta > 1 - 2^{n(r,k)(k-1)}\delta > 1 - 2^{-s-1} \tag{5.2}$$

zum Beispiel für $\delta < 2^{-n(r,k)k}$. Aus (5.2) folgt, daß die Menge

$$B = \{b : b > 3d_s, (\Sigma D \cup \{b\} - \Sigma D) \subset D_{s+1}\}$$

eine untere Dichte von mindestens $1/2$ hat. Wegen der Maximalität von s gibt es für jedes $x \in B$ eine unabhängige Menge $B(x) = \{b_1(x), b_2(x), \ldots, b_{k-1}(x), b_k(x)\}$ mit $\Sigma B(x) \subset \Sigma D \cup \{x\}$ und $\Sigma B(x)$ monochromatisch. Deswegen hat man $b_k(x) \in \Gamma(b_1(x), \ldots, b_{k-1}(x))$. Wegen (i) gilt

$$p(b_1(x)) < p(b_2(x)) < \ldots < p(b_{k-1}(x)) < p(b_k(x)) = s+1$$

und deshalb ist

$$b_k(x) \in D_{s+1} \subset \mathbb{N} - \Gamma(b_1(x), \ldots, b_{k-1}(x)),$$

was den gewünschten Widerspruch liefert. ■

6 Quantitative Versionen des Satzes von Ramsey

Für eine endliche Menge X und eine natürliche Zahl k sei $\binom{X}{k}$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von X. Der Satz von Ramsey sagt, daß es für jedes Tripel $k, l, r \in \mathbb{N}$, $l > k$, $r \geqslant 2$ eine natürliche Zahl $R(k,l,r)$ gibt, so daß es für $|X| \geqslant R(k,l,r)$ und für jede Partition von $\binom{X}{k}$ in r Klassen eine Menge $Y \in \binom{X}{l}$ gibt, so daß $\binom{Y}{k}$ monochromatisch ist.

Der folgende Satz ist eine direkte Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Katona, Nemetz und Simonovits [KNS]. Sei $f(m, k, l, r)$ die minimale Anzahl von Mengen $Y \in \binom{X}{l}$, so daß $\binom{Y}{k}$ monochromatisch ist, wobei das Minimum über alle Partitionen von $\binom{X}{k}$ in r Klassen ($|X| = m$) genommen wird. Das heißt, die Ramseysche Zahl $R(k, l, r)$ ist die kleinste Zahl R, für die $f(R, k, l, r) \geqslant 1$ gilt.

Satz 6.1. *Die Funktion* $f(m, k, l, r) \Big/ \binom{m}{l}$ *ist monoton nicht-abnehmend als Funktion von m.*

Beweis: Sei $|X| = m+1$, und man betrachte eine beliebige Partition von $\binom{X}{l}$ in r Klassen. Aus der Definition von $f(m, k, l, r)$ folgt, daß jede Menge $X - \{x\}$, $x \in X$, mindestens $f(m, k, l, r)$ l-elementige Teilmengen Y enthält, für die $\binom{Y}{k}$ monochromatisch ist. Das gibt insgesamt mindestens $(m+1) f(m, k, l, r)$ Mengen, und jede Menge wurde $(m+1-l)$-mal gerechnet. Daher folgt

$$f(m+1, k, l, r) \geqslant \frac{m+1}{m+1-l} f(m, k, l, r).$$

Wenn man beide Seiten durch $\binom{m+1}{l}$ teilt, erhält man

$$f(m+1, k, l, r) \Big/ \binom{m+1}{l} \geqslant f(m, k, l, r) \Big/ \binom{m}{l}. \qquad \blacksquare$$

Korollar 6.1. *Der Grenzwert*

$$\lim_{m \to \infty} f(m, k, l, r) \Big/ \binom{m}{l} =: \phi(k, l, r)$$

existiert und ist größer als $1 \Big/ \binom{R(k, l, r)}{l}$.

Den Grenzwert $\phi(k, l, r)$ zu bestimmen, ist ein äußerst schweres Problem, sogar für $k = r = 2$. Goodman [Go] hat $\phi(2, 3, 2) = 1/4$ bewiesen und Erdős [E] hat vermutet, daß sogar im allgemeinen

$$\phi(2, l, 2) = 2^{1 - \binom{l}{2}}$$

gilt. Vor kurzem hat Thomason [T] bewiesen, daß für jedes $l \geqslant 4$

$$\phi(2, l, 2) < 2^{1 - \binom{l}{2}}$$

gilt. Die besten unteren Schranken für $\phi(2,4,2)$ und $\phi(2,3,3)$ hat Giraud ([Gi1], [Gi2], [Gi3]) bewiesen. Auf dieselbe Weise, wie wir es im Abschnitt 5 getan haben, kann man eine andere quantitative Version des Satzes von Ramsey beweisen.

Sei δ eine kleine aber positive Zahl, $\delta = \delta(k, l, r)$. Man betrachte eine beliebige Partition von $\binom{\mathbb{N}}{k}$ in r Klassen. Für $1 \leqslant a_1 < \ldots < a_{l-1}$ definiere man

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_{l-1}) = \left\{ a_l \colon \binom{\{a_1, \ldots, a_l\}}{k} \text{ ist monochromatisch} \right\}.$$

Nehmen wir an, daß $\Gamma(a_1, \ldots, a_s)$ für jede Folge $a_1 < \ldots < a_s$ mit $l-1 \geqslant s \geqslant t$ definiert ist. Dann definiert man

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_{t-1}) = \{a_t \colon \bar{d}(\Gamma(a_1, \ldots, a_t)) > \delta\}.$$

Satz 6.2 ([FGR2]). $\underline{d}(\Gamma(\emptyset)) > \delta$.

Literaturverzeichnis

[B] Bergelson, V.: A density statement generalizing Schur's theorem. J. Combin. Th. (A) **43** (1986) 338–343

[D] Deuber, W.: Partitionen und lineare Gleichungssysteme. Math. Z. **133** (1973) 109–123

[FGR1] Frankl, P.; Graham, R. L.; Rödl, V.: Quantitative theorems for regular systems of equations, J. Comb. Th. (A) **47** (1988) 246–261

[FGR2] Frankl, P.; Graham, R. L; Rödl, V.: On the distribution of monochromatic configurations. Proc. Hung. Comb. Conf., Fertöd 1986, in Irregularities of Partitions, G. Halász and V. T. Sos (Eds.), Algorithms and Combinatories 8, Springer-Verlag 1989, 71–87

[FK] Fürstenberg, H.; Katznelson, Y.: An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations. J. Analyse Math. **34** (1978) 275–291

[Gi1] Giraud, G.: Une minoration du nombre de quadrangles unicolores et son application á la majoration des nombres de Ramsey binaires-bicolores. C. R. Acad. Sci. Paris **276** (1973) 1173–1175

[Gi2] Giraud, G.: Sur les proportions respectives des triangles uni, bi ou tricolores dans un tricoloriage des arêtes du n-emble. Discrete Math. **16** (1976) 13–38

[Gi3] Giraud, G.: Sur le probléme de Goodman pour les quadrangles et la majoration des nombres de Ramsey. J. Combin. Theory Ser. B **27** (1979) 237–253

[Go] Goodman, A. W.: On sets of acquaintances and strangers at any party. Amer. Math. Monthly **66** (1959) 778–783

[G] Graham, R. L.: Rudiments of Ramsey Theory, Regional Conference Series in Mathematics, no. 45, AMS, 1981

[GRS] Graham, R. L.; Rothschild, B. L.; Spencer, J. H.: Ramsey Theory. John Wiley & Sons Inc. 1980

[GR] Graham, R. L.; Rödl, V.: Numbers in Ramsey theory. In: Surveys in Combinatorics 1987 (C. Whitehead, ed.) LMS Lecture Series 123, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987, 111–153

[KNS] Katona, G. O. H.; Nemetz, T.; Simonovits, M.: On a graph problem of Turán. Mat. Lapok **15** (1964) 228–238 (in Hungarian)

[R] Rado, R.: Studien zur Kombinatorik. Math. Z. **36** (1933) 242–280

[Ra] Ramsey, F. P.: On a problem in formal logic. Proc. London Math. Soc. (2) **30** (1930) 264–285

[S] Schur, I.: Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$. Jber. Dt. Math.-Verein. **25** (1916) 114–116

[Sh] Shelah, S.: Primitive bounds for van der Waerden numbers. J. Amer. Math. Soc. **1** (1988) 683–697

[Sz] Szemerédi, E.: On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. Acta Arith. **27** (1975) 199–245

[T] Thomason, A.: Random graphs, strongly regular graphs and pseudorandom graphs. In: Surveys in Combinatorics 1987 (C. Whitehead, ed.) LMS Lecture Notes Series 123. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1987, 173–196

[W] van der Waerden, B. L.: Beweis einer Baudetschen Vermutung. Nieuw Arch. Wisk. **15** (1927) 212–216

P. Frankl
R. L. Graham
V. Rödl
AT&T Bell Laboratories
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974, USA

(*Eingegangen: 8. 3. 1990*)