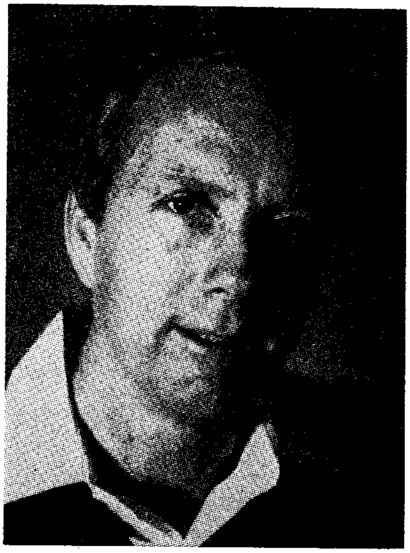


Ronald L. Graham (1935—)

グラハム博士中学生に語る

＝数学はわくわくするほど面白い＝

Mathematics is a very exciting thing.
It's an open-ended challenge.

ロナルド・L. グラハム著
秋山 仁翻案

はじめに司会者(秋山)より紹介

仙石原中学校の皆さんこんにちは．皆さんは，なぜこのような講演会が開かれるに至ったのか，その経緯を知らないかもしれません．それは次のような理由です．

私達，日本の数学者約 100 名が，現在（1986 年 6 月 1 日～5 日），この箱根町立仙石原文化センターと隣の箱根セミナーハウスという所で，数学の中の一つの分野である“グラフ理論”の第 1 回目の国際会議を開いています．世界中（25ヶ国）から，百数十名の第一線で活躍している数学者が，この会議に参加し，数多くの最新の数学的結果が発表され，いろいろな討論が行われています．この会議を実現させるために多くの団体から後援をしていただきました．特に開催地の地元である神奈川県箱根町，箱根町教育委員会から，ご協力をいただきました．その結果，主催者側が期待する以上に盛況な国際会議を開くことができ，参加している数学者たちも，たいへん喜んでいます．

そこで私達も，できれば地元の箱根の人々のご好意に対し何かお返しをしたいと考えました．これからお話しくださるグラハム博士に，箱根町の中学生を対象に最新の数学の話題を素材にして“数学は面白い”という演題でご講演をお願いしました．この依頼をグラハム博士は快く引き受けてくださいました．

最初に，グラハム博士の経歴を，ごく簡単にご紹介します．グラハム博士は，米国ベル研究所の数理科学研究センター（その研究所には 70 名ぐらいの数学者が，常時研究しています）のディレクターをなさっています．彼は数学のいろいろな分野（例えば，グラフ理論，組み合せ理論，整数論，計算機科学，etc.）において，現在までに洞察に富む 200 編を越える論文を著しています！

彼は偉い数学者というだけでなくて，非常に変わった経歴を持っています．アクロバットやジャグリング（西洋お手玉）をして学費を稼ぎ，苦学して，カリフォルニア大学バークレイ校から 24 歳のときに博士号を取りました．機械体操，テニス，ピンポンなどのスポーツにも非常に優れています．皆さんの記憶にはない人かもしれませんが，オリンピックの体操競技の金メダリスト加藤沢男さんも彼の親しい友人のひとりです．語学にも非常に堪能で，中国語を含むいろいろな言葉を話します．しかし，残念ながら日本語はおできにならないので，グラハム博士の本日の講演は東京理科大学の江川嘉美先生に通訳していただくことにします．

また，手品，パズル，ゲームの大家で，アメリカのサーカス協会の会長という変わった肩書きも持っています．お手玉，皿回し，ブーメランやボーリングの玉の投げ方なども学問的に研究していらっしゃいますので，もし講演の時間が余れば，皆さんにそういうものも披露してくださるようにお願いしてあります．

そして，私の左にいる方は，パリ第 7 大学のピーター・フランクル博士で，本日の講演において，ボール回し，ジャグリングなどのお手伝いをしていただく予定です．

グラハム博士の講演開始

このような美しい町箱根に招かれ，利発で熱心な生徒さんたちに講演する機会がもてるのはたいへん光栄です．秋山仁教授の紹介にあったように，私はアメリカから来たロナルド・グラハムで，現在，ニュージャージー州にあるベル研究所で働いています．お配りしてある小冊子をお読みになった方は，たぶん私自身より私のことについてよくご存知でしょう．［講演資料は割愛しましたが，ご希望の方は（切手170円分を同封の上）お知らせください：編集部］

この講演の目的の一つは，あなた方に“数学は面白い”ということを知っていただくことです．そのために，特に数学者たちが面白いと思っていることを紹介しましょう．ご存知のように，コンピュータは我々の生活のいろいろな分野に入り込んでいます．うっかりすると，そのうちにコンピュータを使ってすべての仕事を解決することができるようになって，人間のやることが何もなくなってしまうのではないかと考えることもあると思います．しかし，ご心配には及ばないということを，この講演を通して解っていただけるでしょう．

端的にいえば，コンピュータは現在，ますます強力になってきていますが，それでもコンピュータが解決することができず，おそらく将来も解決できないであろうという問題が山ほどあるということです．どのような大型のコンピュータを使うにしても，そのコンピュータを設計するには数学が必要ですし，そのコンピュータを効率よく使うためにも数学が必要です．諺に

“数学は科学の言語である”

とあるように，数学を使えば他のいろいろな科学，例えば物理や化学，工学などで，より良い仕事をすることができます．

これから紹介するトピックスは，現在，数学がいかに生き生きしているかということ，また長い人類の歴史の中で，現在がいちばん急激な成長を遂げているときであることを示す良い例となるでしょう．今，世界中に過去のどの時代よりも多くの数学者がいます．そして，おそらくあなた方のうちの何人かは，将来数学者になるかもしれません．これから皆さんに

(1) 数学の力によって完全に解決がつくもの．

(2) 数学によって理論的に解明ができ，コンピュータの助けで具体的に解決できるもの．

(3) 現在，世界の最も優れた数学者たちでさえも，解決できないもの．

の三つのタイプの問題を解説しましょう．

1 タタミ敷きつめ問題

最初の問題は，たぶんご存知の方も多いと思います．“タタミ敷きつめ問題”と呼ばれているものです．$4\times4=16$ 個の正方形に分割された部屋があります（図 1.1(a)）．2×1 のサイズの長方形（図 1.1(b)）でこの部屋をすっかり覆いたい．

部屋の面積が 16 で，各タタミの面積が 2 ですから，例えば，図 1.2 のように 8 個使えば覆うことができることは，簡単に解ります．こういう覆い方が何通りあるかということは，応用上非常に重要です．

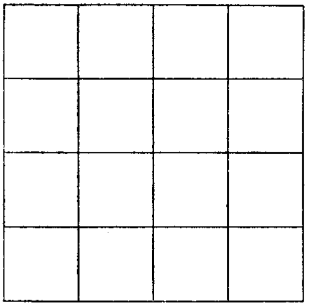


図 1.1(a)

図 1.1(b)

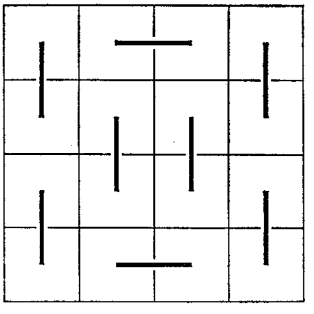


図 1.2

さて，図 1.1(a) から対角線の隅に位置する 2 個の正方形を除きます（図 1.3）．今度は面積は 14 です．7 個のタタミを使って，図 1.3 を覆うことを考えましょう．

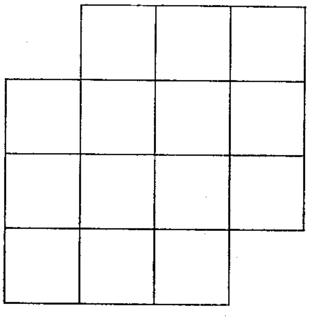


図 1.3

途中までは上手くいきます．その後が難しい．すべての方法を試して，1時間くらいかかれば，不可能であることが納得できると思います．しかし，この例は非常に小さい場合です．もし図 1.4 のような状況だったらどうなるでしょうか（笑）．今度は 1000×1000 の部屋です．

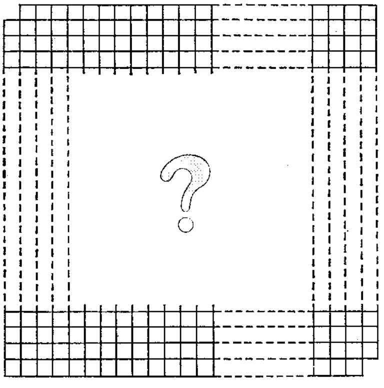


図 1.4

すべての置き方を数え上げてみることは，どんな大きなコンピュータを使ってもできません．可能性がたくさんありすぎるのです．しかし，ちょっとした数学を使えば，なぜ不可能であるか，が簡単に解ります．

では，なぜ不可能なのでしょうか．小さい部屋を例にとって考えましょう．一つ置きに図 1.5 のように，マス目を黒で塗ります．黒白の正方形は全部でそれぞれ何個あるでしょうか．黒は6個，白は8個ですね．図 1.5

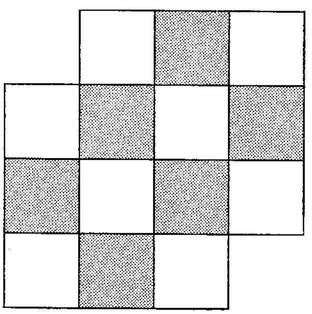
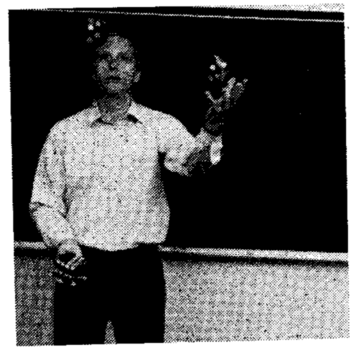


図 1.5

に1個のタタミを置くと（縦に置こうと横に置こうと），必ず白の正方形1個と黒の正方形1個を覆います．ですから，7 個のタタミで覆えたとすれば，黒の正方形7個と白の正方形7個を覆うことになります．しかし，白の正方形の個数の方が黒の正方形より多いので，これは矛盾です．この問題は，コンピュータが解決できない問題ですが，数学を使えば容易に解決できるというタイプ (1) の例です．



2 ルービック・キューブ

つぎに，もう一つ皆さんが馴染みのあるものを紹介しましょう．ここに，ルービック・キューブがあります．普通のものより小さいサイズで 2×2×2 の大きさです．3×3×3 のルービック・キューブをやったことがある方はおおぜいいるでしょう．非常に複雑な手続きを全部マスターすれば，どのような状態になったルービック・キューブを渡されても，それをもとにもどすことはできます．しかし，最小手順については解りません．

図 2.1(c) のような 4×4×4 のルービック・キューブも見たことがあると思います．もちろん，それは 3×3×3 のもの（図 2.1(b)）より複雑で，それができる人の数は極端に少なくなります．5×5×5 のルービック・キューブを見たことがある人は少ないと思います．これは 4×4×4 の場合よりさらに複雑です．それを見て数学者が考えたことは，私も数学者のひとりですが，すべ

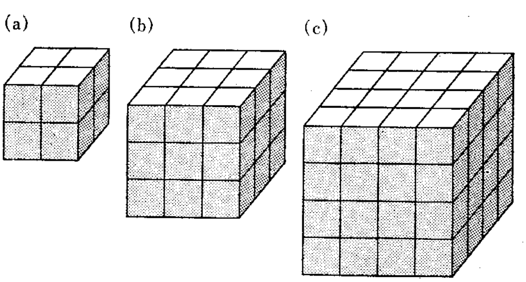
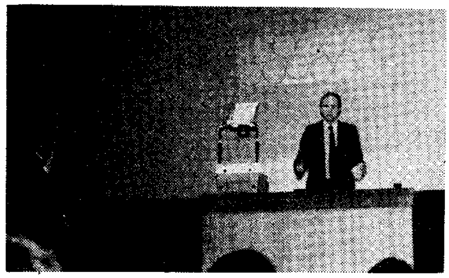


図 2.1

てのキューブの解き方を理解しよう，つまり 3 や 4 や 5 ではなく，もっと一般のキューブ（例えば 10×10×10 など）を考え，それをどのように解決するかということを理解しようとしたのです．

現在，どのようなサイズのキューブでも，それを解くことは非常にやさしいということがわかっています．ただ一通りの手順をマスターすれば，それですべてのキューブが解けるようになります．今，その動きをお見せしましょう（実演）．

3 トラベリング・セールスマン問題



続いて，数学とコンピュータを使うことによってある程度は理解することができるが，完全には理解できないタイプ(3)に属する問題を紹介しましょう．それは“**トラベリング・セールスマン問題**”と呼ばれている問題です．図3.1をご覧ください．これらの町の名前を憶える必要はありません．これはアメリカの州都の地図で，ミシシッピー川より西にある部分を表したもので，22の都市があります．アメリカでは生徒たちは，もちろん，この都市名をすべて憶えなければなりません．

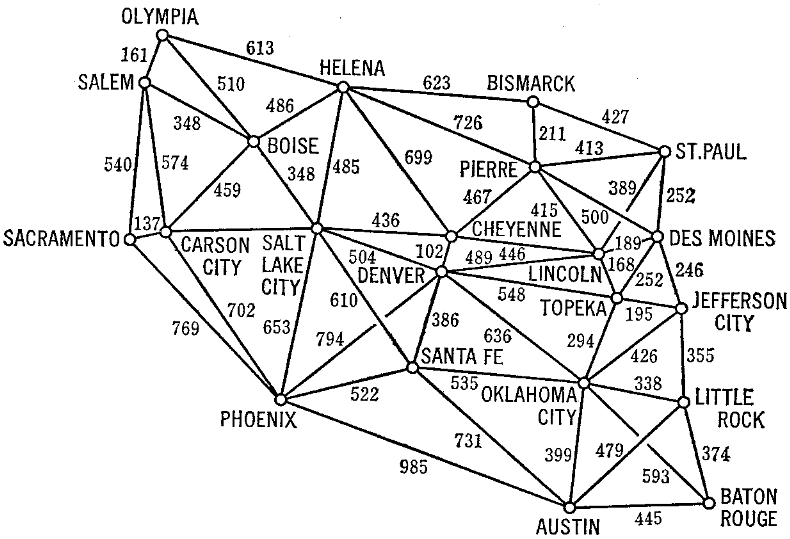


図3.1 数字は結ばれた町の間の距離を表わす（単位はマイル）

さて，問題はつぎのようなものです．

「セールスマンが例えばオリンピアから出発し，すべての都市を少なくとも1回廻って，もとのオリンピアにいちばん距離の短かいルートを使ってもどってくるにはどうすればいいか」

という問題です．すべての道順を探そうとすると，もし，任意の2都市間を結ぶルートがあれば，

$$21! = 21\times20\times19\times\cdots\times3\times2\times1$$

だけの道順があります．数学者はよくこのように“…”を使ってさぼります(笑)．非常に大きな数なので全部を試したいとは思わないでしょう．

ある日，私は1日かけてこれを調べてみましたが，そのとき調べたかぎりでは，図3.2が最良の方法でした．そのルートの全部の長さの合計は8119マイルでした．ところで，コンピュータを使ってこれを調べることができます．22個という都市の数は，コンピュータにとってはそれほど大きい数ではありません．コンピュータは図3.3のような道を見つけました．全部の長さの合計は8117マイル．これは私が1日かかって見つけたルートよりも2マイルだけ短くなっています．道順は図3.2のものと極めて異なっています．

この問題のように真にいちばんいい方法というものが，それより少し劣るが最良に近い方法と，その手順や構成が全く異なっているということがよくあります．現時点では，都市の数が例えば1000だったとしたら，このような問題をどのようにして解いたらよいか，誰にも解りません．1000（廻り方は999!個）という数は大きすぎるのです．ここで重要なことは，このような問題が本当に難しい問題なのか，それとも本当はもっと簡単に解く方法があるのに，未だ発見できないでいるのかということです．

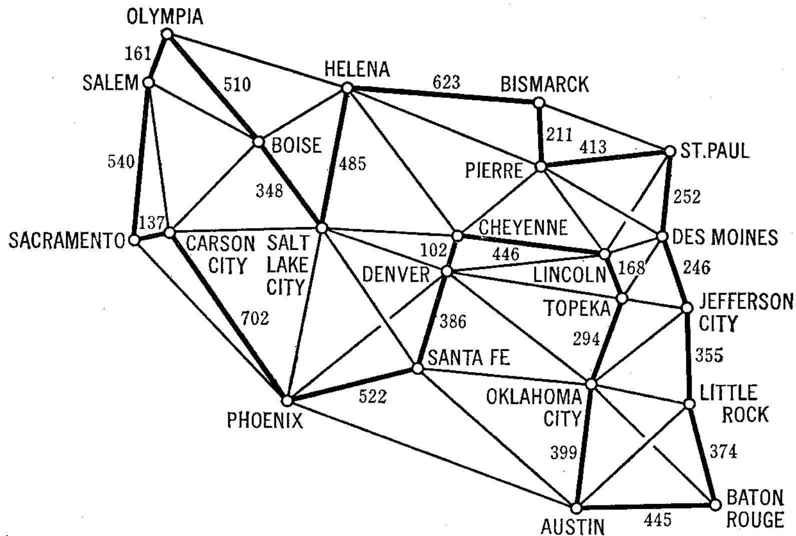


図 3.2 巡回距離の合計は 8119 マイル

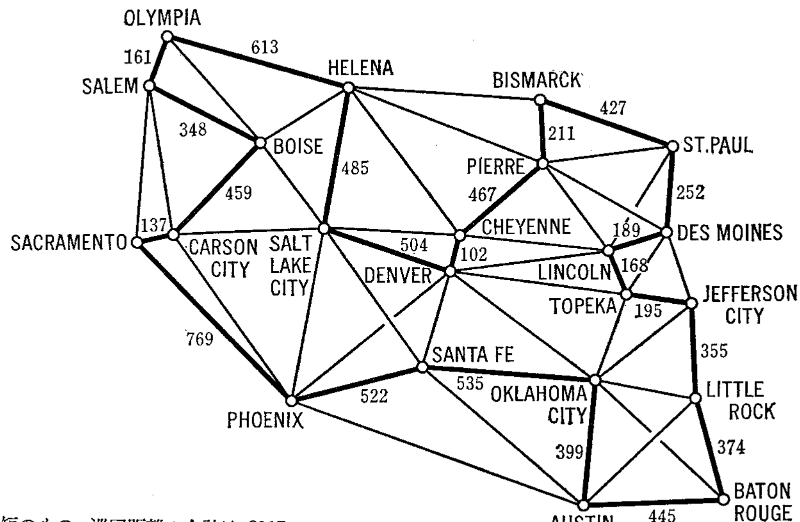


図 3.3 コンピュータがみつけた最短のもの．巡回距離の合計は 8117 マイル

4 多角形問題

さてつぎは，多角形に関する問題です．

「平面上にある n 個の点とそれらを結ぶ n 本の辺からなる直径が 1 の図形で，面積が最大なものを見つけよ」

という問題を考えます．ここで直径が 1 というのは，その図形の中のあらゆる 2 点間の距離を調べたとき，それらの中の最大値が 1 ということです．3 点の場合は一辺の長さが 1 の正三角形（図 4.1(a)）が題意をみたすものになります．4 点の場合も簡単で，正方形（図 4.1(b)）で対角線の長さが 1 であるものが面積最大になります．$n=5$ の場合はやはり正五角形（図 4.1(c)）で，5 本ある対角線の長さがすべて 1 のものになります．

さて，n が 6 の場合，すなわち六角形の場合はどうなるか，ということが，今から 75 年前に問題となりました．直径 1 の六角形をつくるとき，面積最大のものはどのようなものでしょうか．正六角形で，一番遠い頂点間の長さが 1 になっているような図形（図 4.2）が正解ではないかと，推測したくなります．

しかし，これは正解ではないのです．この図形の面積は 0.64952… です．一方，10 年前に私が発見した図

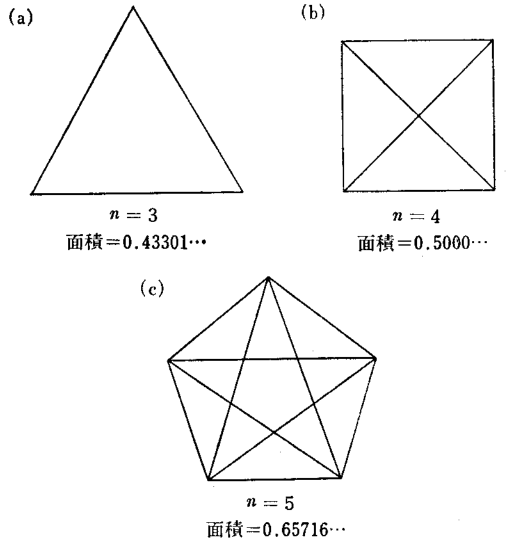
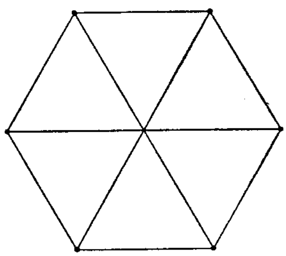
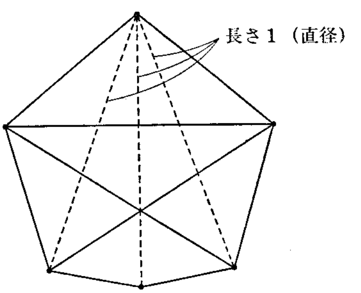


図 4.1 "直径 1 の n 角形で面積が最大になるものを探せ"



面積 = 0.64952…

図 4.2 直径 1 の正六角形



面積 = 0.674981… ; = λ

図 4.3 直径 1 の面積最大の六角形

4.3 の図形では，面積が 0.674981… となり図 4.2 の正六角形より大きくなっています．破線で描いてある対角線が長さ 1（直径）になっています．この面積を λ とおくと次式が成り立ちます．

$$8192\lambda^{10}+16384\lambda^{9}-19968\lambda^{8}-44032\lambda^{7}+18176\lambda^{6}+38528\lambda^{5}-8192\lambda^{4}-12672\lambda^{3}+2520\lambda^{2}+1440\lambda-351=0$$

この見るからに恐しい 10 次の方程式の解が，その面積です．$n=6$ の場合でさえこんなに大変なのですから，この問題がそうやさしくないことが解ると思います．

まだ，解答が知られていないのは，8 個の点の場合です．7 個の点の場合はどうなのかと思う方もいるでしょう．しかし，7, 9, 11, … などの奇数角形の場合には，正 n 角形が最大面積を与える，ということが 1921 年に解かれました．今回，この会議に参加されているポール・エルデス教授は，n が 8 の場合の完全な解を求めた人に 250 ドルの懸賞金を払うとのことです．挑戦してみたらどうでしょうか．

5 素数

話題を変えたいと思います．"素数" というものについてお話しします．素数のことはご存知だと思ますが，自分自身と 1 以外に約数がないような自然数のことです．

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ \cdots$$

などは素数の例です．素数の個数は無限です．素数が無限にあることを証明してみましょう．この講演の中で示す唯一つの証明です．

素数の個数が有限個しかないと仮定し，それらを $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ とします．これらを全部かけ合せたものに 1 を加え，それを M と置きます：

$$M=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\cdots\cdot p_n+1$$

この数 M は p_1 から p_n までのどの素数でも割り切れません．しかし，M は素数でないので，ある素数で割り切れるはずです．したがってこれは矛盾です．この矛盾によって，素数が無限にある，ということが証明できました．

ところで，すべての数は素数の積で表わすことができます．そこで，つぎのような一連の数について調べましょう．まず，111 は 3 で割り切れることが簡単に解ります．1111 は素数でしょうか．何かで割り切れるでしょうか．実は，

$$1111=11\times 101$$

となります．

素数でない数をどのように素数の積で表わすか，という類いの研究は今，非常に活発に行われています．というのは，このことが暗号問題などに重要な応用があるからです．しかし，それらは非常に難しい問題のように思えます．

もっと大きい数を考えましょう．

$$11111=41\times 271$$

これくらいなら電卓でもなんとかなります．つぎの数は，前のより簡単です．

$$111111 = 3\times 7\times 11\times 13\times 37$$

昨年，アメリカでいちばん大きなコンピュータが，1が 71 個並んだ数

$$\overbrace{11,111,111,\cdots,111}^{71}$$

について挑戦し，何日間もかけて，これが素数でないことを発見しました．すなわち，つぎのように二つの素数の積に分解できます（笑）．

$$241573142393627673576957439049\times$$
$$45994811347886846310221728895223034301839$$

このような問題が解ける電卓を設計する人がいるとしたら，それはたぶん日本人でしょう．

$$\overbrace{11,111,\cdots\cdots,111}^{1031}$$

は素数であることが解っています．1 が 1031 個並んだ数です．しかしこの数が，1 を並べてつくった数のうち最大の素数であるかどうかについては，誰にも解っていません．このような数が素数かどうか，ということは，2000 年以上も前から研究されています．

ふたつの素数が，差が 1 となることがあるでしょうか．ここに例があります．2 と 3 です．これ以外にあるでしょうか．このようなふたつの数，n と $n+1$ があると，そのうちの一つは偶数でなければなりません．ということは，2 で割り切れるということです．2 で割り切れる素数というのはただ一つ，それは 2 です．だから，このような数の組は一つしかありません．

これは簡単すぎて面白くなかったかもしれません．そこで，数学者はこの質問をもっと難しいものに変えました．ふたつの素数で差が 2 というものがあるでしょうか．そのようなふたつの素数は **"双子素数"** と呼ばれています．ここにいくつか例があります（表 5.1）．この表はどこかでお終りになるでしょうか．

n	$6n\pm1$
1	5,　7
2	11,　13
3	17,　19
5	29,　31
7	41,　43
10	59,　61
12	71,　73
17	101,　103
18	107,　109
⋮	⋮

表 5.1

n	x_n
1	2
2	1.5
3	0.8333⋯
4	0.3667⋯
5	2.3606⋯
6	1.9370⋯
7	1.4207⋯
8	0.7169⋯

表 6.1

6　カオス

つぎの話題は，中学生には少し難しいかもしれません．皆さんは数列というのはご存知でしょうか．例えば，

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{x_n}, \qquad x_1 = 2 \qquad \cdots\cdots (6.1)$$

これはどういう数列でしょうか．このように，数列の各項の間の関係式を漸化式といいます．はじめのほうを実際に計算していくと，表 6.1 のようになりますが，一般項 x_n はどんな数でしょうか．それは，誰にもわかっていません．このように，漸化式の解のよくわからない様子を，「**カオス**」と呼んでいます．これは，生物集団の個体数の変化など，自然現象の研究に興味深い応用をもっています．単純な規則から，カオス（混沌）の名のとおり複雑な現象があらわれるところが面白い点です．

次のような数列を考えてみましょう．

$$x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n}, \qquad x_0 = a, \quad x_1 = b \quad \cdots\cdots (6.2)$$

はじめに初期値 $x_0 = a$, $x_1 = b$ を与えましょう．皆さん何か数を与えてください．（生徒より）

$$x_0 = 5, \qquad x_1 = 8$$

はい，解りました．$x_2, x_3, \cdots$ を計算してみましょう．

$$x_2 = \frac{1+8}{5} = \frac{9}{5}$$

$$x_3 = \frac{1+9/5}{8} = \frac{14/5}{8} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$$

$$x_4 = \frac{1+7/20}{9/5} = \frac{27/20}{9/5} = \frac{3}{4}$$

$$x_5 = \frac{1+3/4}{7/20} = \frac{7/4}{7/20} = 5$$

$$x_6 = \frac{1+5}{3/4} = \frac{6}{3/4} = 8$$

さあ，ここで注意してください．最初に $x_0 = 5$ と $x_1 = 8$ があって，今また $x_5 = 5$ と $x_6 = 8$ が続いて現れました．だから，5 回計算するとはじめの数にもどります．すなわち，周期的に $5, 8, \frac{9}{5}, \frac{7}{20}, \frac{3}{4}$ がくり返されます．非常に不思議な現象です．なぜこのようなことが起こるのか，ほかの状況下でもこのようなことがあるのか，ということについてはよく解っていません．漸化式 (6.1) と (6.2) は類似していますが，一般項は全く異なる "ふるまい" をしていることが解ります．このように予測される結論が，全く違った様相を呈することもある，ということを示す例です．

7 詰め込み問題

次に，数学的考察が難しく，かつ，コンピュータもあまり助けにならないような問題を紹介したいと思います．

それは，平面上の円に関係した問題です．同じ大きさのいくつかの円を平面上に最も効率よく配置する，すなわち，無駄な面積をできるだけ少なくするように配置するには，図 7.1 のような六角形の置き方というのが一番効率のいい方法だということは証明されています．それでは無限に広がる平面上に配置するのではなく，帯状のところに，直径1の円を効率よく配置するにはどうすればいいでしょうか．もし，この帯状の領域の幅が3であれば，図 7.2 のように配置すればよいことがわかり

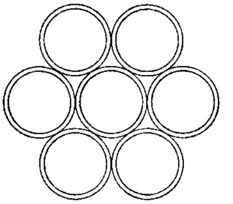


図 7.1

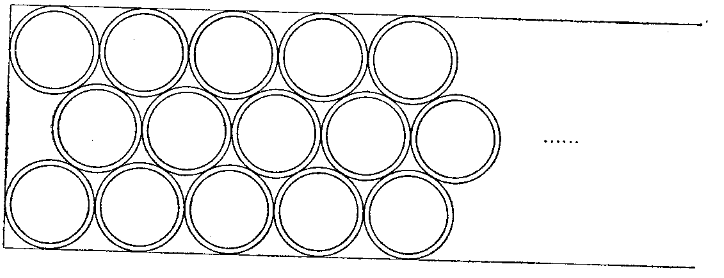


図 7.2 幅が3の場合

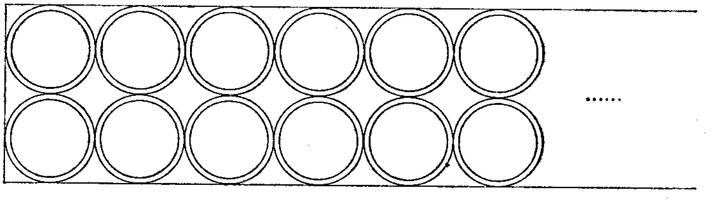


図 7.3 幅が2の場合 (1)；2000 個

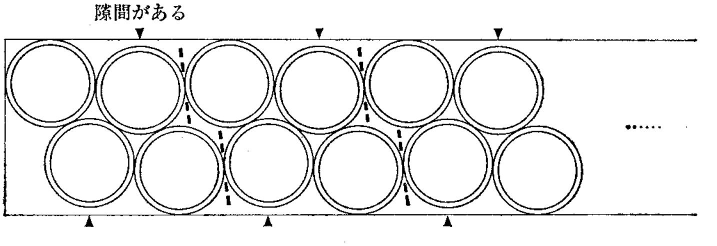


図 7.4 幅が2の場合 (2)；2008 個

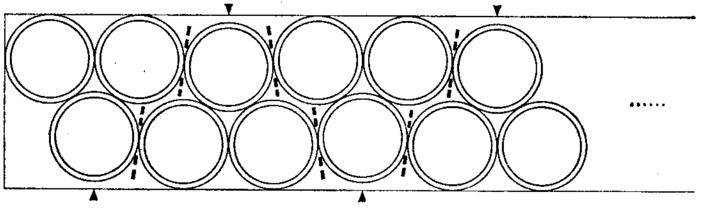


図 7.5 幅が2の場合 (3)；2012 個

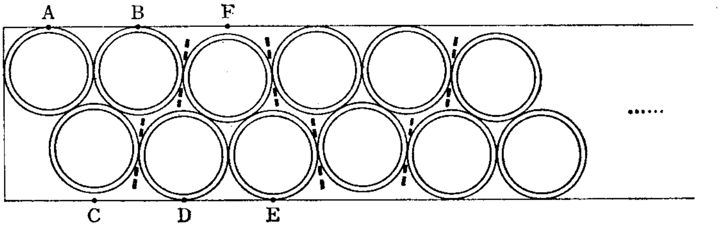


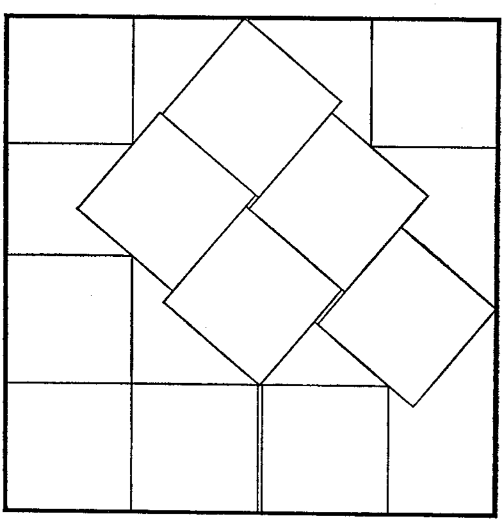
図 7.6 幅が2の場合 (3)；2012 個

ます．もし，幅が2だったらどうすればいいのでしょうか．一つの方法は図 7.3 のように配置する方法です．今，この帯状の領域が幅が2で長さが 1000 であるとすると，2000 個の円を配置することができます．

しかし，もっといい方法が，ハンガリーのある有名な数学者によって発見されました．それは，図7.4のように円を4個ずつ，つないで並べていきます．上下に少し隙間があることに注意してください．この方法によれば今度は 2000 個より8個多い 2008 個，詰めることができます．この配置が発見された後 10 年間，数学者たちはこれが最良であることを証明しようと努力しました．けれども成功しませんでした．成功しなかった理由は，これが最良ではなかったからです（笑）．

私も図 7.4 の方法が最良であることを証明しようと，非常な努力を払いましたが，最後にもっといい方法を発見しました．今度は，3 個の円を図 7.5 のようにくっつけて並べます．さきほどの配置とは異なります．この方法では，2012個，並べることができます．3個ずつが1組になっていて，3 個のうちの2個は帯の片側の辺に接し（図 7.6 の点 A, B, D, E など），残りの1個は帯のもう一方の側と隙間を作っています（点 C, E など）．これが最良でしょうか．この質問に対する答えは誰も知りません．これよりよい方法を発見した人は，現在まで誰もいません．しかし，これが最良の方法であることを証明することができる人もいません．

この問題とか，3 次元空間に球を詰め込む問題は，通信，伝達の分野で重要になります．すなわち，あなた方の声を電子に換えて能率よく送ろうとするときに，このような問題が極めて重要になります．円がやさしすぎると思う人は，正方形を詰めることを考えてみたらいいでしょう．図 7.7 は 11 個の正方形をできるだけ小さい面積をもつ正方形に詰め込む方法です．これは，今まで知られている中で最良の方法です．しかし，これも，この方法が最良かどうかが解っていません．こういう問題では，コンピュータは使えません．というのは，方法が無限にあるからです．



$s = 3.8770835900\cdots$

図 7.7 $s^8-20s^7+178s^6-842s^5+1923s^4-496s^3-6754s^2+12420s-6865=0$

8 大きな数

今度の話題は，“大きな数”についてです．まず，

$2^2=4.$

これはそんなに大きい数ではないですね．つぎは 2^{2^2}，言いにくいですね．上の方から計算していくと，2 の二乗は4でしたから，

$2^{2^2}=2^{(2^2)}=2^4=16$

となります．少し大きくなりましたが，そんなに大きな数ではありません．さあ，もう一つ2を重ねるとどうなるでしょうか．$2^{2^{2^2}}$，3 つに重なった場合は既に計算してありますから，

$$2^{2^{2^2}}=2^{\left(2^{2^2}\right)}=2^{16}=65536$$

となります．次々と続けることができます．

$$2^{2^{2^{2^2}}}=2^{\left(2^{2^{2^2}}\right)}=2^{65536}$$

どんどん大きな数になっていきます．2 進法というものをご存知でしたら，このような数を表現するのは簡単です．長くかかりますが，1 の後にただゼロを続けるだけです．このように表わされた数を，“**塔**”または“**タワー**”といいます．すなわち，

$$T_n(x)=\left.x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}\right\}n$$

のように x が n 個巾に並んだものを，“x の高さ n の塔”と呼びます．先ほど計算した例は，

$$T_5(2)=2^{2^{2^{2^2}}}=2^{65536}$$

ということになります．

この“タワー” $T_n(x)$ については，よくわかっていないことがたくさんあります．その一例をお見せしましょう．

$$T_n(1.4)=\left.1.4^{1.4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1.4}}}}}\right\}n$$

さあ，この場合は，どのくらい早く大きくなっていくで

しょうか．$T_n(2)$ の場合は，n をひとつ大きくするごとに，非常な速度で大きくなっていくことは今観察した通りです．$T_n(1.4)$ が 100 以上となるのは，n がいくつのときでしょう．n が 10 のときでしょうか？ 20？ 100？ どうでしょう，推測でも結構です．先生方もどうぞ．1.4 の代りに $\sqrt{2}$ を使った場合は

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots$$

ですから，1.4 を使った場合より大きくなります．すなわち，

$$T_n(1.4)<T_n(\sqrt{2}),\qquad T_n(\sqrt{2})=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots^{\sqrt{2}}}}}$$

$T_n(\sqrt{2})$ のいちばん上の $\sqrt{2}$ を 2 におきかえることによって，次の不等式が得られます．

$$\begin{aligned}
T_n(\sqrt{2})&=\left.\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}}}}\right\}n\text{層}\\
&<\left.\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{2}}}}}\right\}n\text{層}\\
&=\left.\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots^{\sqrt{2}^{2}}}}\right\}(n-1)\text{層}\\
&=\cdots\cdots=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{2}}=\sqrt{2}^{2}=2
\end{aligned}$$

結局，

$$T_n(1.4)<T_n(\sqrt{2})<2$$

ということが解ります．

もし，1.4 のかわりに 1.5 を使ったらどうなるでしょう．1.5 の場合は n が大きくなるにしたがって，どんどん大きくなります（$T_n(1.5)\to\infty$ ($n\to\infty$ のとき)）．この違いはどうして生ずるのでしょう．皆さんの将来の勉強のために，これは残して置くことにします．

9 ほんとうに大きな数

最後は，“ほんとうに大きな数” についてお話しします．次のような定理があります．

定理 9.1 十分大きな n のとき，n 次元の超立方体のすべての対角線をかってに 2 色で塗り分けるとき，“一平面上の 4 点で，その 4 点間の 6 本の対角線がすべて同じ色になる” ……（＊）ものが存在する．

n が十分大きければ，ある性質が成り立つ，そういう類いの定理です．この種の現象を体系的に扱う分野を**ラムゼー理論**といいます．n が十分大きければ，というのはどの程度大きければいいのでしょうか．その数を N_0 とし，N_0 の上界を評価することが，この節の目的です．

3 次元の場合で考えてみます．立方体の頂点間の可能な辺を全部結びます．図 9.1 のような辺の塗り方をすると，一平面上の 4 点で，この 4 点間の 6 本の辺がすべて青線（破線）である 4 点を見つけることができます（図 9.2）．しかし，このような 4 点が存在しないような色の塗り方もあります．実際，3 次元立方体の各辺（全部で ${}_8C_2=28$ 本）をどのように青か赤でかってに塗っても，条件（＊）をみたさない塗り方が存在します．これをもっと高い次元，4 次元や 5 次元，一般に n 次元空間で超立方体を考えるとどうなるか，というのが先ほどの定理 9.1 です．中学生の方には少し難しいでしょう．

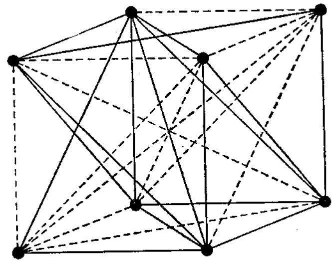


図 9.1 青（破線），赤（実線）

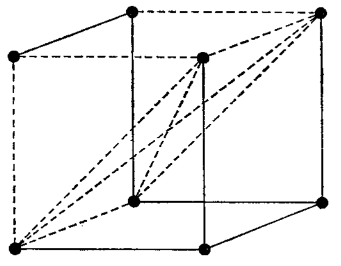


図 9.2 青（破線），赤（実線）

大きな数を表すために，（↑）という記号を用います．これは，

$$a\uparrow n=a^n$$

と定義します．また，矢印を 2 本書いて

$$a\uparrow\uparrow n=\overbrace{a\uparrow(a\uparrow\cdots(a\uparrow a)\cdots)}^{a\text{について}n}=a^{a^{a^{\cdots^{a}}}}\Big\}n$$

と定義します．これは，⑧ で説明した “タワー” というものです．今度は 3 本矢を書いて，

$$a\uparrow\uparrow\uparrow n=a\uparrow\uparrow(a\uparrow\uparrow(\cdots(a\uparrow\uparrow a)\cdots))=\left.a^{a^{a^{\cdots^{a}}}}\right\}a^{a^{a^{\cdots^{a}}}}\Big\}\cdots\quad n\text{層}$$

と定義します．以下同様です．a のタワーをいっぱいつくります．そのタワーの長さはいくらか，ということを示すのに，またタワーを使います．再びそのタワーの長さを示すのに，またタワーを使う．……それを示すのに n 個の塔（タワー）が必要，そういう数です．

これがどれほど大きな数かを見きわめるために，一つの例，$3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$ について調べましょう．この4本の矢印が入った数を次々に簡単にしていくと

$$
\begin{aligned}
3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 &= 3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow 3) \\
&= 3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow 3)) \\
&= 3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow 3^{3^{3}}) \\
&= 3\uparrow\uparrow\uparrow \left. 3^{3^{3^{3^{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}}}}\right\} 7625597484987 \\
&\ \text{7625597484987 層}\left\{\begin{matrix} 3^{3^{3}} \\ \vdots \\ 3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}} \\ 3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}} \\ 3^{3^{3^{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}}} \end{matrix}\right. \\
&= 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}
\end{aligned}
$$

となります．

さて，定理 9.1 で問題になっている数 N_0 は，$3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$ から始めて，この矢の数だけ，3 と 3 の間に矢を並べる．矢を1つ置くだけでも，どんどん大きくなるのに，矢の数を順に多くしていくわけです．64 回この

$$
\left.
\begin{array}{c}
3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \\
\vdots \\
\overbrace{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\cdots\cdots\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3} \\
\overbrace{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3} \\
\vdots \\
N_0 \leqq \overbrace{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}
\end{array}
\right\} \text{64層}
$$

ことをくり返す．今のところ，N_0 はこれだけ大きくすれば十分だ，ということが解っています．たぶん実際はもっとずっと小さい数で十分でしょう．この数 N_0 に対する逆方向の不等式は，

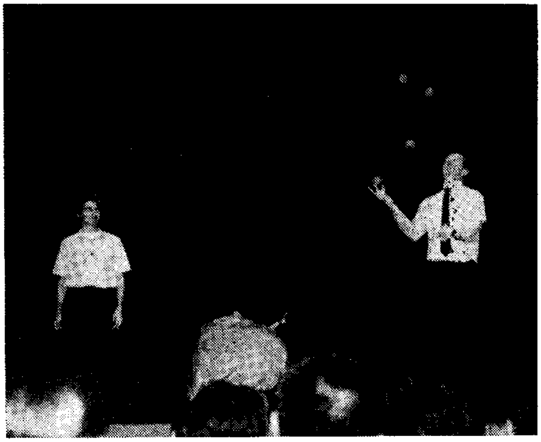
$$N_0 \geqq 6$$

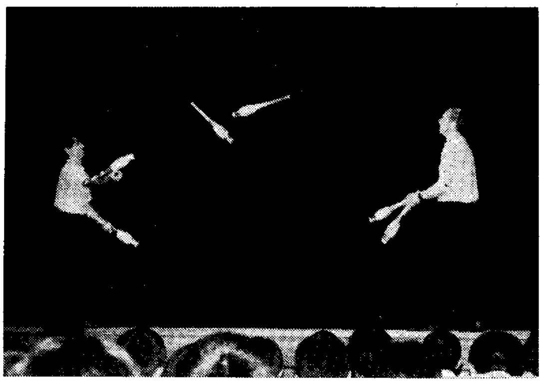
が解っているだけです．たぶん6が正しい答えでしょう．

この特別な数は，**グラハムの数**としてギネス・ブックにも載っています．その同じページに，矢印記号の解説がしてあります．この数が数学的な定理の証明の中で今までに使われたいちばん大きな数です．これだけ大きいと，コンピュータでもどうにもならないことが推測できるでしょう．

10 ジャグリング（お手玉）実演

数学というのは数やコンピュータを扱うだけでなく，一見関係のなさそうないろいろなことに関連してきます．例えば，ジャグリング（西洋式のお手玉）はその一例です．（拍手）——実演——





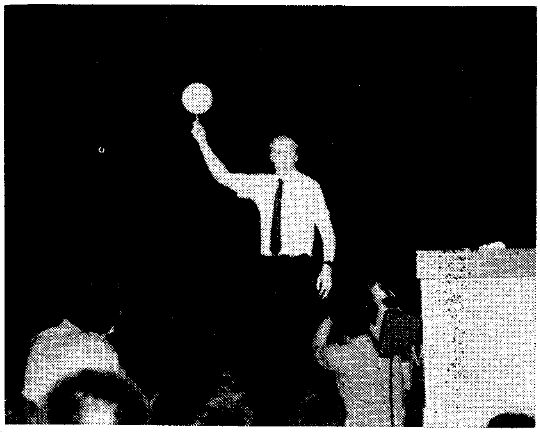


写真 上：5 つのボールでジャグリングするグラハム．
中：フランクルとボーリングのピンをやりとり．
下：指の上でバレーボールをまわすグラハム．

世界中の多くのジャグラー（お手玉師）は，実は数学者またはコンピュータ科学者です．不思議に思われるかもしれませんが，お手玉と数学やコンピュータの間には非常に似た特徴があります．ジャグリングというのは，いろいろなパターンから成り立っています．コンピュータを使うときにも，ある一定のパターンまたは型に従った手順で問題を解きます．つぎのような諺があります．

「ジャグリングのボールは自分が放った所へ行く」

つまり，「ボールを落としてしまったら，それはその人の責任であり，他のどの人の責任でもない」ということです．コンピュータでも同じです．あなたがそうやれと命じたことをコンピュータは正確にやります．

今からお手玉のいくつかの型をお見せします．その後に何人かの方にステージに出て来ていただいて，実際にやっていただきたいと思います．最初にまず，基本的な型を示します．4 個の場合の型と，3 個の場合の型が違うのは，4 個を 3 個の法則に当てはめようとすると，2 本しか手がないので中央でぶつかってうまくいかないからです．整数論は，ジャグリングにも役に立つのです!?

それでは難しい型をお見せするために，有名な数学者でかつお手玉のベテランのピーター・フランクル先生に手伝っていただきましょう．ボールを前に投げすぎたりしないように注意しなければいけません．いちばん重要なステップは，2 個でやったときの型です．これができれば，後は同じことです．すなわち，同じことをただ続けるだけ，数学的帰納法です（笑）．そんなに難しくないことがお解りになったと思います．さあ，生徒さん，やってみませんか．――生徒実演――

ジャグリングは，ただ投げて受けるだけではなく，体のコントロールも必要です．正しいコントロールのためには練習が必要です．それは，お手玉も数学も同じです．

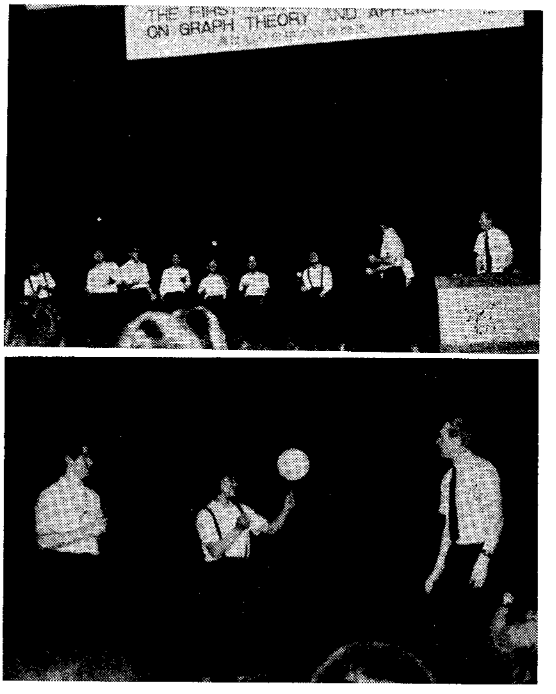


写真 上：お手玉をたのしむ生徒たち．
下：ボールまわしにみごと成功．

私の講演を通して未解決な問題とはどのようなものか，数学がいかに大切か，また数学がとても面白いものだということの一端でも皆さんに解っていただけたら幸いです．数学や科学の未来はあなた方，若い人々の手にかかっています．われわれが解けなかった問題に挑戦し，それを解くことはあなた方の責任でもあります．皆さん頑張ってください．　　　［1986 年 6 月 3 日］

●この講演は，江川嘉美氏（東京理科大学）が同時通訳されたものをもとに，翻案されたものです．　［編集部］

（AT&T ベル研究所）
（あきやま じん／東海大学）