线性规划计算的复杂性

COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF LINEAR PROGRAMMING

黄光明　格雷汉

1979年11月7日，《纽约时报》第一版上刊出了一篇文章，开头就说："苏联无名数学家的新发现震动了数学和数值分析的世界"，还说这一发现可能应用到气象予报、工业规划、原油提炼、大工厂作业表设计、巡回路线问题和密码设计等方面。

这样一个耸人听闻的新发现到底是怎么一回事呢？为什么它会有这样大的威力呢？

这个新发现就是1979年1月《苏联科学院院刊》发表的一位年青学者哈强（Khachian）关于线性规划的椭球算法的研究报告。这个报告宣布了整系数线性规划不是一个 NP 完全问题。到目前为止，这个新发现还只是计算理论上的一个重要发现，还要做很多工作才能真正用于计算。而且，上面说到的作业表设计，巡回路线和密码设计也根本不是线性规划问题，不能应用哈强的新发现。这一点，《纽约时报》后来也更正了。

但是，这件事毕竟有着这么一段戏剧性的历史，又涉及到线性规划和计算理论这两个重要的学科，自然引起许多人的兴趣。在这里，我们愿向大家做个简单的介绍。

一　计算复杂性

要计算机解题，先要有一个算法（algorithm），比如解线性方程组的消去法等等。一个算法是否有实用价值，与它所需的计算时间有密切关系。由于各种计算机结构不同，基本运算（如加、减、乘、除或比较大小）所用的时间也不同，所以理论上通常以基本运算的次数来作为一个算法所需计算时间的尺度。

另一方面，一个算法往往可以用于规模大小不同的许多问题。比如说，有n个数已按从大到小的数排列好，现在又有一个数，我们想把这个数插入到那n个数当中去。最简单的办法是把他和那n个数一一比较，直到发现比他小的数为止，然后把它插在这个数前面。这就是所谓逐个比较法。这里，n就表现了问题规模的大小。如果$n=10$，我们最多需要做10次比较大小的运算，如果$n=100$，我们也许会做多得多的比较大小的运算。比如说，如果碰巧那个数比 n 个数都小，我们就得做100次这种运算。这当然是最糟的情况，但是在理论上，我们必须考虑在内。总而言之，一个算法（在最糟的情况下）所需要的运算次数可以看成是问题规模的一个函数，这个函数就叫这个算法的**计算复杂性**。

一个算法的计算复杂性如何，直接决定了这个算法可以应用到多大规模的问题上。比如说甲算法的计算复杂性是n^3；乙算法则是3^n。用百万次的计算机来计算，当$n=60$时，甲算法要用0.2秒；乙算法则要用4×10^{28}秒即10^{15}年，相当于十亿个这样的计算机在一百万年中做的工作量的总和。

上面的例子说明，在考虑计算复杂性的时候，多项式复杂性（如n^3）与指数复杂性（如3^n）是有极大的差别的。因此，一个问题如果没有多项式复杂性算法，就叫做难解型（intractable）问题。

不过，要断定一个问题是不是难解型问题却不是一件容易的事。即使一百年都没找到一个多项式复杂性的算法，也不能保证第一百零一年不会有人发现这样的算法。为了研究这个问题，非要用一番理论上的功夫不可。这样就有了计算复杂性理论。

在计算复杂性理论中，用一种图灵机（Turing machine）代表一个抽象化了的计算机。另外还设计了一种实际上不可能实现的非决定性(nondeterministic)图灵机做为研究工具。一个问题如果用图灵机为工具时有多项式复杂性算法，就归之于P类（P是多项式 polynomial 的字头），如果用非决定性图灵机为工具时有多项式复杂性算法，就归之于NP类（N

黄光明（Frank K. Hwang）贝尔实验室离散数学室研究员。
格雷汉（R. L. Graham）贝尔实验室离散数学室主任。

是非决定性 nondeterministic 的字头）。粗略地说，一个问题的答案有多项式复杂性算法来检验的话，这个问题就属于ＮＰ类。多数的实际问题找答案也许很难，检验答案都不难，所以都属于ＮＰ类。因此，一个重要的理论问题就是决定Ｐ类和ＮＰ类是否相同，即：Ｐ＝ＮＰ？

1972年，卡尔普（Karp）指出，ＮＰ类中有一小类问题具有以下的性质：迄今为止，没有人找到多项式复杂性算法。但是一旦其中的一个问题找到了这样的算法，那么就可以断定Ｐ＝ＮＰ。通常把这类问题叫ＮＰ完全（NP-complete）问题。已经知道属于这一类的问题有：布尔（Boolean）多项式的可满足性（satisfiability）问题、整数规划（integer-programming）问题、巡回路线（traveling salesman）问题、图（graph）的可着色性（colorability）问题、集合复盖（set cover）问题，作业表（scheduling）问题和最小连接树（minimal Steiner tree）问题等等。这些问题大都经过深思熟虑而找不到多项式复杂性算法，而ＮＰ完全的观念又把他们连结成一个有着共同命运的大问题。所以多数人都猜想Ｐ≠ＮＰ。此外，他们还认为有些问题的复杂性介于Ｐ与NP之间，如素数判定问题，图形同构问题，因式分解问题等等。线性规划问题也是其中之一。

二　线性规划和单纯形法

在ＮＰ完全性的研究中，线性规划是很重要的一个问题，这主要是它的广泛的实用性。比如本刊第一期中就有三篇经济或管理方面的文章提到它（《投入产出表》、《从科学管理到管理科学》、《现代化管理方法》）。线性规划可以说是这样的一种问题：如何最有效地分配有限的资源以达到既定的目标（如最低成本最大收益）。

例如某厂制衣服和裤子两种产品，生产过程中都要用缝纫机和钉扣机，所需的机器时间及各机器每天可使用的时间如下表（单位是小时）：

机　器	缝纫机	钉钮机
每件衣服用	3	5
每条裤子用	5	2
每日可使用	15	10

若每件衣服获利５元，每条裤子获利３元，问每日应生产多少衣服获利最多。

设每天生产衣服 x_1 件，裤子 x_2 条，那么，x_1 和 x_2 必须满足以下的不等式：

$$3x_1+5x_2\leqslant 15$$
$$5x_1+2x_2\leqslant 10$$
$$x_1\geqslant 0$$
$$x_2\geqslant 0$$

我们的目的是使总获利 $z=5x_1+3x_2$ 尽可能地大。

上面的几个不等式中，前两个不等式叫做约束（constaints），z 叫做目标函数（objective function）。在线性规划中，他们必需都是线性的。

一组 x_1 和 x_2 如果满足所有的不等式，我们叫做可行（feasible）解。可行解的集合叫可行集。如果所给的约束条件是办不到的，就没有可行解，这时，可行集就是空的，如果可行集不空，其中目标函数最大值的解就是最优解。由于目标函数和约束式都是线性的，必然有一个顶点是最优解。因此，我们只用比较顶点的目标值就可以得到最优解。

一个线性规划问题中，如果有 v 个变数，c 个约束，可行集就是 v 维空间中的一个凸多面体，它最多有 $\binom{c+v}{v}$ 个顶点。所以，如果我们一个一个地计算目标值，这个算法的复杂性就是 $c+v$ 的指数函数。

1947年，但泽（Dantzig）发明了所谓单纯形法。他指出，一个顶点的目标值如果比相邻的顶点的目标值都大，它就一定是最优解。他提出了这样的算法：以某一个顶点为基点，计算和他相邻的各顶点的目标值，如果这些值当中有比基点目标值大的，就选目标值最大的那个做为新的基点；这样进行下去，直到基点目标值大于所有邻点的目标值为止，这时的基点就是最优解。

单纯形法在1951年公布以后，就被普遍地使用起来，因为经常可以很快地找到最优解。这反映了它所需要的运算次数平均说来并不太多。但是不幸的是，1972年克里（Klee）和闵替（Minty）找出了一些对单纯形法最不利的例子，从而说明了这个算法的计算复杂性不是多项式，而是指数函数。

应该说明的是，克里和闵替的例子都是人为的怪例，在实际问题中可能永不出现。因此，对单纯形法的实用性只不过投上了一个淡淡的阴影。同时，这也促使人们重新考虑把最糟的情况中的运算次数做为计算复杂性的标准是否妥当。

三　哈强的椭球算法

1979年哈强提出了椭球算法。首先，根据线性规划的一种对偶性质，线性规划求最优解问题可以归结为一组线性不等式求解的问题。对于整系数的线性规划，这一组线性不等式的系数也都是整数。用矩阵的写法，可以把这一组线性不等式写成

（P1）　　$Pw\leqslant q$

利用 P，q 的元素都是整数这一特点，可以证明，（P1）是否有解就取决于

（P2）　　$Pw\leqslant q+2^{-H}$

是否有解。这里，H 是一个根据 P 和 q 计算出来的量。而且还可以证明，（P1）如果有解，（P2）的解的集合的体积就必须大过一个数，这个数也可以从 P 和 q 计算出来。此外还可以证明，这些解都在以零点为中心的一个适当的椭球内。

对于这样的椭球，我们先检查他的中心是不是一

个解，如果是解，当然就完毕了。如果不是，它一定不满足（P2）中的某一个不等式。按照这个不等式的方向经过中心做一个超平面把椭球切成两半，其中的一半所含的点都不满足这个不等式，所以都不是解。因此，所有的解就都在椭球的另一半里。在这半个椭球中选一个点做为中心做出一个新的椭球，使他包含这半个椭球，他也就包含了所有的解。于是又可以重复上面的步骤。

这样做出来的椭球，不但总是含有所有的解，而且椭球算法还保证了他们的体积是按一定比例收缩下去。上面说到，如果（P1）有解，那么（P2）的解的体积就要大过一定限度。所以上面的步骤重复到一定程度时，椭球的体积就会小过这个限度，到那时再找不到解，那就说明（P1）根本没有解了。

在用单纯形法计算时，如果约束很多，则要考查的顶点就很多，造成计算的负担。但椭球算法完全不同。如果不等式很多，我们甚至更容易选出一个不等式对我们的计算有利。因此决定计算复杂性的主要因素不是不等式的数目，而是每两个椭球的体积的比例。由于椭球算法的这个优点，使得它的运算次数是个多项式。

哈强这个算法的主要意义就是指出了线性规划问题是P类的。所以在他的报告中，他宣称："要么这个问题不是NP完全的，要么P＝NP。"

四 结 语

哈强的算法是计算理论上的一个重要成就。那么它的实际意义如何呢？

哈强只讨论了整系数的线性规划。但是，一般的线性规划不难用整系数线性规划来近似，所以这一点并不降低它的实用性。

问题在于，对于实际问题来说，单纯形法的计算速度非常之快，所以椭球算法不能和它相比。有些人正在改进椭球算法，但是是否能胜过单纯形法还未知。

除了线性规划的计算问题，哈强的算法还可以用到其他一些组合最优化（combinatorial optimization）问题上，最近格罗切尔（Grotschel），罗瓦斯（Lovász）和施里内尔（Schrijner）用这种办法解出了组合分析上的一些难题。这一方面的发展是值得重视的。

哈强一炮而红，美国记者去访问他的老师波斯别洛夫（Pospelov），却回答"想不到"。其实，另外几个苏联人绍尔（Shor），涅米洛夫斯基（Nemirovsky）和尤金（Yudin）已经做了椭球变换及其收敛性的结果。哈强总结了他们的工作并应用到了线性规划问题上，才做出了这轰动一时的新成果。

至于哈强为什么会成为新闻人物，那大概是由于他的成果传到美国经过了一番波折的缘故。1979年1月，他的报告发现之后，波兰的一位朋友寄了一份给德国的布尔克哈尔德（Burkhard）。同年5月，在瑞士奥伯沃法赫（Oberwolfach）的数学规划会议上，他向大家问起，竟没人知道，因为都不懂俄文。会后，美国的劳勒（Lawler）教授在荷兰找到一位捷克人弗拉赫（Vlach）翻译出来，但因为原文中没有证明部分，所以不知道他的正确性。劳勒寄了一些译文给他在美国的友人，其中一份传到了正在斯坦福大学访问的匈牙利学者加奇（Gac）和罗瓦斯（Lovász）手中，他们把证明补上了并写成英文，这才洛阳纸贵，轰动美国，跳上了《纽约时报》的第一版。