Colloques internationaux C.N.R.S.
N° 260 - PROBLÈMES COMBINATOIRES ET THÉORIE DES GRAPHES

DISTANCE MATRIX POLYNOMIALS OF TREES

R. L. GRAHAM
Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey 07974, USA
L. LOVÁSZ
Jozsef Attila Tudo maryegyctem, Szeged, Hongrie

Abstract. — For a finite undirected tree T with n vertices, the distance matrix $D(T)$ of T is defined to be the n by n symmetric matrix whose (i, j) entry is d_{ij}, the number of edges in the unique path from i to j. Denote the characteristic polynomial of $D(T)$ by

$$\Delta_T(x) = \text{Det}\,(D(T) - xI) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k(T)\, x^k .$$

In this note we describe exactly how the coefficients $\delta_k(T)$ depend on the structure of T. In contrast to the corresponding problem for the adjacency matrix of T, the results here are surprisingly difficult, requiring the use of a number of interesting auxiliary results.

Polynômes de la matrice des distances d'un arbre. — Pour un arbre fini non orienté T à n sommets la matrice des distances $D(T)$ de T est la matrice carrée symétrique d'ordre n dont l'élément d_{ij} est le nombre d'arêtes de l'unique chaîne joignant i à j. Notons le polynôme caractéristique de $D(T)$ par

$$\Delta_T(x) = \text{Det}\,(D(T) - xI) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k(T)\, x^k .$$

On peut trouver dans [1] un début d'étude sur les relations entre les coefficients $\delta_k(T)$ et la structure de T. Dans cette note nous amorçons une solution complète de cette question. Les démonstrations sont assez compliquées et seront données ultérieurement.

Pour un graphe sans cycle (c'est-à-dire une forêt) F, notons $N_F(T)$ le nombre de sous-graphes de T isomorphes à F.

Théorème 1. — *Il existe des coefficients $A_F^{(k)}$, définis de manière unique à partir de F et k, et tels que, pour tous les arbres T à n sommets :*

$$\delta_k(T) = (-2)^n \sum_F A_F^{(k)}\, N_F(T)$$

où F parcourt l'ensemble des forêts sans point isolé ayant au plus $k+1$ arêtes.

L'unicité des coefficients $A_F^{(k)}$ est la conséquence d'un résultat récent dans [4]. On peut comparer ce résultat au résultat correspondant pour le polynôme caractéristique de la matrice associée de l'arbre :

$$\text{Det}\,(A(T) - xI) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(T)\, x^k$$

où $A(T) = (a_{ij})$ avec

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad d_{ij} = 1 \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Dans ce cas il est bien connu [6] que

$$a_k(T) = \begin{cases} (-1)^t N_{tP_1}(T) & \text{si} \quad k = n - 2t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où tP_1 représente une forêt constituée de t arêtes disjointes.

Les valeurs exactes des coefficients A_F sont données comme suit. Pour une forêt F qui est l'union disjointe d'arbres ayant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_r$ sommets, posons $\Pi(F) = n_1 n_2 \ldots n_r$. Soit $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des forêts sans point isolé ayant exactement k arêtes. Par convention $\mathcal{F}_0$ contient seulement la forêt vide F^* et $\Pi(F^*) = N_{F^*}(T) = 1$ pour tout T.

Théorème 2. — *Pour tous les arbres T à n sommets*

$$\delta_k(T) = (-1)^{n-1}\, 2^{n-k-2} \times \\ \times \left\{ \sum_{F \in \mathcal{F}_{k+1}} a_F\, \Pi(F)\, N_F(T) + \sum_{F \in \mathcal{F}_k} b_F\, \Pi(F)\, N_F(T) \right. \\ \left. + \sum_{F \in \mathcal{F}_{k-1}} c_F\, \Pi(F)\, N_F(T) \right\}$$

où a_F, b_F, c_F sont définis par récurrence comme suit :

(i) $a_{F^*} = b_{F^*} = 0$, $c_{F^*} = -4$.

(ii) *Si F est un arbre T' avec $n' \geqslant 1$ sommets et une matrice de distances (d'_{ij}) alors*

$$a_{T'} = \frac{1}{n'} \sum_{i<j} d'_{ij}(2 - d'_{ij})$$

$$b_{T'} = \frac{4}{n'} \sum_{i<j} (2 - d'_{ij})$$

$$c_{T'} = -\frac{4}{n'}.$$

(iii) *Si F est l'union disjointe des forêts F_1 et F_2 alors*

$$a_F = a_{F_1} + a_{F_2}$$

$$b_F = b_{F_1} + b_{F_2}$$

$$c_F = c_{F_1} + c_{F_2} + 4.$$

Comme corollaire immédiat, en prenant $k = 0$ nous avons

$$\mathcal{F}_1 = \{ P_1 \}, \quad a_{P_1} = \tfrac{1}{2}, \quad b_{P_1} = 2, \quad c_{P_1} = -2, \quad \Pi(P_1) = 2$$

et

$$\delta_0(T) = (-1)^{n-1} 2^{n-2}(\tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot N_{P_1}(T) + 0)$$
$$= (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2} \qquad (1)$$

et ce résultat ne dépend pas de la structure de T (voir [2], [3]). Un résultat intéressant utilisé dans la preuve du théorème 1 est le suivant :

Lemme. — *La matrice inverse $D(T)^{-1} = (d^*_{i,j})$ de $D(T)$ est donnée par*

$$d^*_{i,j} = \frac{(2 - d_i)(2 - d_j)}{2(n-1)} + \begin{cases} +\frac{1}{2} a_{i,j} & \text{si } i \neq j \\ -\frac{1}{2} d_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

où d_i est le degré du i-ième sommet de T.

Il est naturel d'espérer des résultats analogues pour tous les graphes connexes G. Il est connu [5], par exemple, que si G a des blocs G_j, $j \in J$, alors en notant cof X la somme des cofacteurs de la matrice X nous avons

$$\operatorname{cof} D(G) = \prod_{j \in J} \operatorname{cof} D(G_j) \qquad \text{(a)}$$

$$\operatorname{Det} D(G) = \sum_{j \in J} \operatorname{Det} D(G_j) \prod_{i \neq j} \operatorname{cof} D(G_i). \qquad \text{(b)}$$

Bien évidemment (1) est une conséquence immédiate de (a) et (b) puisque tous les blocs d'un arbre sont isomorphes à P_1. On ne sait pas encore si $\Delta_T(X)$ détermine T. Ce n'est pas le cas en général pour tout graphe G (voir [1]) et ce n'est presque jamais le cas pour Det $(A(T) - xI)$ (voir [7]).

References

[1] M. Edelberg, M. R. Garey and R. L. Graham, On the distance matrix of a tree, *Discrete Math.* **14** (1976) 23-29.

[2] R. L. Graham and H. O. Pollak, On the addressing problem for loop switching, *Bell. Sys. Tech. Jour.* **50** (1971) 2495-2519.

[3] R. L. Graham and H. O. Pollak, Embedding graphs in squashed cubes, Springer Lecture Notes in Math., Vol. 303 (1973) 99-110.

[4] R. L. Graham and E. Szemerédi, On subgraph number independence in trees, *Jour. Comb. Th.* (to appear).

[5] R. L. Graham, A. J. Hoffman and H. Hosoya, On the distance matrix of a directed graph, *Jour. of Graph Theory* **1** (1977) 85-88.

[6] A. Moshowitz, The characteristic polynomial of a graph, *Jour. Comb. Th. (B)* **12** (1972) 177-193.

[7] Allen J. Schwenk, Almost all trees are cospectral, *New Directions in the Theory of Graphs*, Acad. Press, New York (1973) 275-307.