Université de Paris

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

THESES

PRESENTEES

POUR OBTENIR LE GRADE DE

Docteur ès-Sciences Mathématiques

PAR

Mohamed Salah Baouendi

1ère Thèse : SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES.

2ème Thèse : PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE.

SOUTENUE LE 9 JANVIER 1967 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM.	DENY	Président
	LIONS	Examinateurs
	MALGRANGE	

TABLE DES MATIERES

-:-::-::-:-

-::-::-::-::-:-

INTRODUCTION

Plusieurs auteurs ont étudié des problèmes aux limites elliptiques dans des espaces de Sobolev avec poids. On peut renvoyer par exemple à Geymonat et Grisvard [8] , Lizorkin et Nikolsky [26], Morel [28] ainsi qu'à leurs bibliographies.

Ils ont ainsi étudié des problèmes aux limites pour des opérateurs de la forme

$$(1) \qquad \psi A(D)$$

où $A(D)$ est un opérateur elliptique dans l'adhérence d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, et ψ une fonction s'annulant sur son bord Γ (ou devenant infini).

Notons que Kiprijanov [12] , Lizorkin [25] ,... ont examiné des problèmes voisins.

Le but de ce travail est d'étudier des problèmes aux limites dans des espaces du type L^2, pour une classe d'opérateurs elliptiques dans Ω qui dégénèrent au bord (i.e. qui cessent d'être elliptiques sur Γ). Nous ne supposons pas la dégénérescence totale comme dans (1) . Plus précisément nous considérons des opérateurs de la forme :

$$(2) \qquad A(D) = \Lambda^* \Lambda + \varphi^\rho B(D) \varphi^\rho$$

où Λ est un opérateur d'ordre 1 défini dans $\bar{\Omega}$ et transversal à Γ , $B(D)$ est un opérateur elliptique d'ordre 2 dans $\bar{\Omega}$, φ est une fonction $\mathcal{E}^\infty$ telle que Γ soit défini par $\varphi(x) = o$, enfin ρ est un entier positif.

Nous nous limitons ici, au cas des opérateurs d'ordre 2 , mais les méthodes utilisées et les résultats obtenus pourraient probablement être étendus à l'ordre supérieur.

Chapitre.I.

Dans le chapitre I, nous étudions des espaces de Sobolev avec poids dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+ = \{(x,y)\ ,\ y>0\}$.

Désignons par $W^m(\alpha,s)$ l'espace des fonctions u dans $\mathbb{R}^n_+$ vérifiant :

$$y^\alpha u \in L^2_+(H^s(\mathbb{R}^{n-1}))$$

$$D^m_y u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$$

Nous démontrons l'inclusion :

$$W^m(\alpha,s) \subset W^m(\beta,r)$$

avec $-\frac{1}{2} < \beta \leq \alpha$; $r = s\,\frac{\beta + m}{\alpha + m}$

ainsi que le résultat de "dérivée intermédiaire" suivant :

$$W^2(\alpha,s) \longrightarrow W^1(\tfrac{\alpha}{2}\ ,\ \tfrac{s}{2})$$

$$u \longmapsto D_y u$$

Nous utilisons, ensuite, ces résultats pour établir des "lemmes de commutation" utiles aux chapitres suivants.

Chapitre.II.

Le chapitre II est réservé à la régularité des solutions des problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'opérateur $A(D)$ défini par (2) . Ainsi on démontre, que, si le second membre est dans $H^k(\Omega)$ (k entier$\geqslant o$), et u est la solution, on a :

$$(3) \qquad \Lambda^2 u \in H^k(\Omega) \qquad , \qquad \varphi^{2\rho} u \in H^{k+2}(\Omega) \; .$$

$H^k(\Omega)$ étant l'espace habituel de Sobolev d'ordre k .

Nous utilisons, pour cela, la "régularisation elliptique" qui consiste à approcher (2) par un opérateur elliptique non dégénéré (en lui ajoutant $-\varepsilon\Delta$). Ceci nous permet de considérer notre solution comme "limite" d'une suite de fonctions $\mathscr{C}^\infty$. (voir Kohn et Nirenberg [14] , Lions [15], Oleinik [31]...) .

Nous nous ramenons, ensuite, au cas du demi-espace et nous utilisons les résultats du chapitre I.

Nous remplaçons l'utilisation des "quotients différentiels", dans l'étude de la régularité, par celle des dérivations fractionnaires parallèles au bord, comme le font Kohn et Nirenberg [14] .

Notons que nos résultats ((3) par exemple) sont plus précis - dans ce cas - que ceux obtenus par ces auteurs dans un cadre voisin et plus général.

Chapitre.III.

Soit U un ouvert de R^n vérifiant : $\overline{\Omega} \subset U$.

Nous supposons que l'opérateur (2) est donné dans U (Λ étant toujours transversal à Γ , bord de Ω , défini par $\varphi(x) = o$.)

Nous démontrons des résultats de régularité à l'"intérieur" par des méthodes semblables à celles du chapitre précédent. Nous en déduisons, en particulier, l'hypoellipticité de cet opérateur dans U .

Notons H(A) l'espace des u appartenant à $H^\circ(\Omega)$ et telles que $A(D)\, u \in H^\circ(\Omega)$. Nous montrons, alors, à partir du résultat précédent que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans H(A), et que $u \longmapsto (\gamma u \,,\, \gamma \Lambda u)$ se prolonge en une application continue de H(A) dans

$$H^{-\frac{1}{2(\rho+1)}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$$

Nous démontrons, enfin, que nous avons les deux isomorphismes :

$$H(A) \xrightarrow{(A(D)\,,\gamma\,)} H^\circ(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$$

$$H(A) \xrightarrow{(A(D)\,,\gamma\,\Lambda\,)} H^\circ(\Omega) \times H^{-\frac{3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$$

ce qui étend des résultats de Lions et Magènes dans le cas elliptique (voir [23]), aux opérateurs que nous considérons.

Je suis très heureux de pouvoir exprimer ici toute ma gratitude à Monsieur Bernard MALGRANGE à qui je dois ma formation mathématique.

Je remercie également Monsieur Jacques Louis LIONS pour tout l'intérêt qu'il a porté à mes recherches, et Monsieur Laurent SCHWARTZ pour ses continuels encouragements. Je leur suis très reconnaissant de m'avoir permis d'exposer l'essentiel de ce travail dans leur séminaire (1965-1966).

Ma reconnaissance va également à Monsieur Jacques DENY qui a bien voulu me proposer le sujet de seconde thèse et présider le Jury.

-::-::-::-::-

CHAPITRE I

ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

I. ESPACES AVEC POIDS.

Soient A et B deux espaces de Hilbert séparables. On suppose que $A \subset B$, algèbriquement et topologiquement, A étant dense dans B. On définit, alors, un opérateur Λ auto-adjoint, positif, non borné dans B tel que A soit le domaine de $\Lambda^{\frac{1}{2}}$:

$$A = D(\Lambda^{\frac{1}{2}})$$

On pose, comme dans [18], pour $o \leqslant \theta \leqslant 1$;

$$A^{1-\theta} B^{\theta} = D(\Lambda^{\frac{1-\theta}{2}})$$

Si X est un espace de Hilbert, on désigne par $L^2(X)$ (respectivement $L^2_+(X)$) les classes de fonctions $y \longmapsto u(y)$ de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{R}_+ = \{ y \in \mathbb{R} \ , \ y > o \}$) à valeur dans X. On munit ces espaces des normes :

$$|u|_{L^2(X)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(y)|^2_X \, dy \right)^{1/2}$$

$$|u|_{L^2_+(X)} = \left(\int_{o}^{\infty} |u(y)|^2_X \, dy \right)^{1/2}$$

Désignons par $W^m(\alpha, A, B)$ les classes de fonctions u telles que :

(I.1) $\quad y^{\alpha} u \in L^2_+ (A)$

(I.2) $\quad u^{(m)} \in L^2_+ (B)$

(α désignant un nombre réel, m un entier positif, et $u^{(m)}$ la dérivée d'ordre m de u).

Nous prenons pour norme :

$$|u|_{W^m(\alpha\, ,\, A\, ,\, B)} = \left(|y^\alpha u|^2_{L^2_+(A)} + |u^{(m)}|^2_{L^2_+(B)} \right)^{1/2}$$

Si $u \in W^m(\alpha\, ,\, A\, ,\, B)$, $u^{(m)}$ est intégrable sur $[0,1]$, et $u',\ldots,u^{(m-1)}$ sont égales, presque partout, à des fonctions absolument continues sur $[0,1]$ à valeur dans B . Nous pouvons donc définir des traces à valeurs dans B :

$$\gamma u = (\gamma_o u\, ,\ldots, \gamma_{m-1} u) \quad \text{avec} \quad \gamma_i u = u^{(i)}(o) \quad .$$

Désignons par $\overset{\circ}{W}{}^m(\alpha, A, B)$ les u appartenant à $W^m(\alpha\, ,\, A\, ,\, B)$ telles que $\gamma u = o$.

Nous avons :

THEOREME.(I.1). Pour tout nombre réel α , tout entier m positif et tout θ , $o \leq \theta \leq 1$, nous avons l'inclusion algébrique et topologique :

$$\overset{\circ}{W}{}^m(\alpha\, ,\, A,\, B) \subset \overset{\circ}{W}{}^m(\beta\, ,\, A^{1-\theta}\, B^\theta\, ,\, B)$$

avec $\beta = (1-\theta)\alpha - \theta m$

DEMONSTRATION : 1°) On commence par démontrer le théorème pour $\theta = 1$ (i.e. $\beta = -m$) . γu étant nulle, on a pour tout $u \in \overset{\circ}{W}{}^m(\alpha\, ,\, A\, ,\, B)$:

$$\frac{u(y)}{y^m} = \frac{1}{y^m} \int_o^y dt_1 \int_o^{t_1} dt_2 \ldots \int_o^{t_{m-1}} u^{(m)}(t_m) \quad dt_m$$

ou encore :

$$\left|\frac{u(y)}{y^m}\right|_B \leq \frac{1}{y} \int_o^y \frac{dt_1}{t_1} \int_o^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \ldots \int_o^{t_{m-1}} |u^{(m)}(t_m)|_B\, dt_m$$

et finalement, en appliquant m fois l'inégalité de Hardy on obtient:

$$(I.3) \qquad \left|\frac{u(y)}{y^m}\right|_{L^2_+(B)} \leq C \left|u^{(m)}\right|_{L^2_+(B)}$$

où C est une constante indépendante de u. Ceci démontre le théorème dans le cas $\beta = -m$.

2°) Soit $u \in \overset{\circ}{W}{}^m(\alpha, A, B)$. On a, d'après (I.1) et (I.3) :

$$(I.4) \qquad \begin{cases} y^{\alpha} u \in L^2_+(A) \\ y^{-m} u \in L^2_+(B) \end{cases}$$

$\zeta = \xi + i\eta$ étant un nombre complexe, considérons la fonction holomorphe à valeur dans $L^2_+(B)$:

$$w(\zeta, y) = y^{(1-\zeta)\alpha - \zeta m} u(y) \qquad .$$

Nous vérifions à partir de (I.4) :

$$\begin{cases} w(i\eta, y) \in L^2_+(A) & \sup\limits_{\eta} \left|w(i\eta, \cdot)\right|_{L^2_+(A)} < +\infty \\ w(1+i\eta, y) \in L^2_+(B) & \sup\limits_{\eta} \left|w(1+i\eta, \cdot)\right|_{L^2_+(B)} < +\infty \end{cases}$$

Nous avons, alors, en utilisant la théorie de "l'interpolation holomorphe" (voir [5], [21]) :

$$y^{(1-\theta)\alpha - \theta m} u(y) = w(\theta, y) \in \left[L^2_+(A), \; L^2_+(B)\right]_{\theta}$$

$$\left|w(\theta, .)\right|_{[L^2_+(A),\, L^2_+(B)]_{\theta}} \leq C \left(\left|y^{\alpha} u\right|_{L^2_+(A)} + \left|y^{-m} u\right|_{L^2_+(B)} \right)$$

Comme $\left[L^2_+(A), L^2_+(B)\right]_{\theta}$ coïncide avec $L^2_+(A^{1-\theta} B^{\theta})$, (cas hilbertien de l'interpolation holomorphe), nous obtenons finalement (1) :

$$|u|_{\mathring{W}^m(\beta, A^{1-\theta} B^{\theta}, B)} \leq C\, |u|_{\mathring{W}^m(\alpha, A, B)}$$

Ce qui démontre le théorème.

THEOREME.(I.2). Pour tout entier m et tous nombres réels α et β vérifiant : $-\frac{1}{2} < \beta \leq \alpha$, nous avons l'inclusion algébrique et topologique :

$$W^m(\alpha, A, B) \subset W^m(\beta, A^{1-\theta} B^{\theta}, B)$$

avec $\theta = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + m}$

DEMONSTRATION : supposons $-\frac{1}{2} < \beta \leq \alpha$ et posons $\theta = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + m}$.
D'après [19] et [24] l'application $u \longmapsto \gamma_j u$ ($j = o, \ldots, m-1$) est linéaire, continue et surjective de $W^m(\alpha, A, B)$ dans $A^{1-\theta_j} B^{\theta_j}$ avec :

$$1-\theta_j = \frac{2m - 2j - 1}{2(\alpha + m)} \qquad (2)$$

De même $u \longmapsto \gamma_j u$ est linéaire, continue et surjective de $W^m(\beta, A^{1-\theta} B^{\theta}, B)$ dans $[A^{1-\theta} B^{\theta}]^{(1-\theta'_j)} B^{\theta'_j}$ avec :

$$1-\theta'_j = \frac{2m - 2j - 1}{2(\beta + m)}$$

comme $(1-\theta)(1-\theta'_j) = (1-\theta_j)$, on voit que les deux espaces $W^m(\alpha, A, B)$ et $W^m(\beta, A^{1-\theta} B^{\theta}, B)$ admettent les mêmes traces.

---

(1) La lettre C pourra désigner des constantes différentes.
(2) En effet, avec les notations de [24] quand u parcourt $W^m(\alpha, A, B)$ $\gamma_j u$ parcourt $T_j^m(2, \alpha, A ; 2, o, B)$ qui est égal à $T(2, \gamma, A ; 2, \gamma, B)$ (théorème 2-2 de [24]). Mais d'après [19], ce dernier espace est bien $A^{1-\theta_j} B^{\theta_j}$, avec $\gamma + \frac{1}{2} = \theta_j$.

Nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME.(I.1). (Relèvement) : il existe une application linéaire et continue R_j $(j = o, \dots, m-1)$ de $A^{1-\theta_j} B^{\theta_j}$ dans $W^m(\alpha, A, B) \cap W^m(\beta, A^{1-\theta} B^{\theta}, B)$ telle que, pour tout f appartenant à $A^{1-\theta_j} B^{\theta_j}$, on ait :

$$\gamma_k(R_j f) = o \quad \text{pour} \quad k \neq j$$

$$\gamma_j(R_j f) = f$$

avec $-\frac{1}{2} - j < \beta \leq \alpha$, $1 - \theta_j = \dfrac{2m - 2j - 1}{2(\alpha + m)}$, $\theta = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + m}$

DEMONSTRATION DU LEMME :

Comme dans [18], nous utilisons le théorème de diagonalisation des opérateurs auto adjoints (voir [6]). Il existe une somme mesurable d'espaces hilbertiens $H = \int^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ (avec $\lambda \geqslant o$ et $d\mu(\lambda)$ une mesure positive), et une isométrie T de B sur H telle que :

$$u \in D(\Lambda^{\rho}) \text{ équivaut à } \lambda^{\rho}\, T u \in H .$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\varphi(y) = 1$ dans un voisinage de l'origine. On se donne $f \in A^{1-\theta_j} B^{\theta_j}$.

On pose :

$$g(\lambda) = T f$$

$$\text{(I.5)} \qquad w(\lambda, y) = \frac{1}{j!}\, g(\lambda)\, y^j \varphi(\lambda^{\frac{1}{2(\alpha + m)}} y)$$

On vérifie facilement que l'on a :

$$\text{(I.6)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^k w}{\partial y^k}(\lambda, o) = o & \text{si } k \neq j \\ \dfrac{\partial^j w}{\partial y^j}(\lambda, o) = g(\lambda) & \end{cases}$$

Nous avons, par la formule de Leibnitz :

$$\text{(I.7)} \quad \frac{\partial^m}{\partial y^m} w(\lambda, y) = g(\lambda) \sum_{k=o}^{j} C_k\, y^{j-k}\, \lambda^{\frac{m-k}{2(\alpha+m)}}\, \varphi^{(m-k)}(\lambda^{\frac{1}{2(\alpha+m)}} y)$$

Montrons, maintenant, que l'expression :

$$A = \int_0^\infty d\ \mu(\lambda) \int_0^\infty \left| \frac{\partial^m w}{\partial y^m}(\lambda, y) \right|^2_{H(\lambda)} dy \quad \text{est finie.}$$

En utilisant (I.7) et le changement de variables $v = y\ \lambda^{\frac{1}{2(\alpha+m)}}$

on trouve :

$$\text{(I.8)} \quad A = \left(\int_0^\infty |g(\lambda)|^2_{H(\lambda)} \lambda^{\frac{2m-2j-1}{2(\alpha+m)}} d\mu(\lambda) \right) \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{j} C_k v^{j-k} \varphi^{(m-k)}(v) \right)^2 dv$$

En calculant de même les expressions :

$$B = \iint \lambda y^{2\alpha} |w(\lambda, y)|^2_{H(\lambda)}\ d\mu(\lambda)\ dy$$

$$C = \iint \lambda^{\frac{\beta+m}{\alpha+m}}\ y^{2\beta} |w(\lambda, y)|^2_{H(\lambda)}\ d\ \mu(\lambda)\ dy$$

on trouve :

$$\text{(I.9)} \quad B = \left(\int_0^\infty |g(\lambda)|^2_{H(\lambda)}\ \lambda^{\frac{2m-2j-1}{2(\alpha+m)}}\ d\ \mu(\lambda) \right) \left(\int_0^\infty v^{2(\alpha+j)}\ \varphi^2(v)\ dv \right)$$

$$\text{(I.10)} \quad C = \left(\int_0^\infty |g(\lambda)|^2_{H(\lambda)}\ \lambda^{\frac{2m-2j-1}{2(\alpha+m)}} \right) \left(\int_0^\infty v^{2(\beta+j)}\ \varphi^2(v)\ dv \right)$$

Posons $(R_j f)(y) = T^{-1}\ w(\lambda, y)$.

(I.8) (I.9) et (I.10) montrent la continuité de Rj de $A^{1-\theta j}\ B^{\theta j}$ dans $W^m(\alpha, A, B) \cap W^m(\beta, A^{1-\theta} B^{\theta}, B)$.

(I.6) montre que nous avons bien :

$$\gamma_k(R_j\ f) = 0$$
$$\gamma_j(R_j\ f) = f$$

C.Q.F.D.

Revenons maintenant à la démonstration de notre théorème. Soit $u \in W^m(\alpha, A, B)$. La fonction $\sum_{j=0}^{m-1} R_j\ (\gamma_j\ u)$ appartient à $W^m(\alpha, A, B) \cap W^m(\beta, A^{1-\theta} B^\theta, B)$.

Nous avons :

$$v = u - \sum_{j=o}^{m-1} R_j(\gamma_j \; u) \in \overset{\circ}{W}{}^m(\alpha, A, B)$$

donc, v est dans $W^m(\beta, A^{1-\theta} B^\theta, B)$ d'après le théorème (I.1), et finalement u appartient aussi à cet espace. La continuité résulte de celle de R, γ et du théorème (I.1) .

C.Q.F.D.

REMARQUE.I.1.

Sans la condition $-\frac{1}{2} < \beta$, le théorème (I.2) serait faux. En effet, il est facile de voir, que pour $\beta \leqslant -\frac{1}{2}$, les $u \in W^m(\beta, A^{1-\theta} B^\theta, B)$ admettent une trace $\gamma_o u$ nulle. Il n'en n'est pas de même pour $W^m(\alpha, A, B)$ avec $\alpha > -\frac{1}{2}$. On ne peut, donc, avoir l'inclusion de ce théorème dans ce cas.

Nous utiliserons ces espaces dans les cas $m = 1,2$.

Voici un théorème de "dérivée intermédiaire".

THEOREME.I.3. L'application $u \longmapsto u'$ est continue de $W^2(\alpha, A, B)$ dans $W^1(\frac{\alpha}{2}, A^{1/2} B^{1/2}, B)$ pour $\alpha > -1$.

Démontrons d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION.I.1: L'application $u \longmapsto u'$ est continue de $\overset{\circ}{W}{}^2(\alpha, A, B)$ dans $\overset{\circ}{W}{}^1(\frac{\alpha}{2}, A^{1/2} B^{1/2}, B)$ pour tout nombre réel α .

DEMONSTRATION : Nous allons commencer par montrer que les fonctions de $\overset{\circ}{W}{}^2(\alpha, A, B)$, à support compact dans $\mathbb{R}_+$, forment un sous espace dense dans $\overset{\circ}{W}{}^2(\alpha, A, B)$. Soient φ et ψ deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\varphi(y) = 1 \quad \text{pour} \quad |y| \leq 1$$

$$\varphi(y) = 0 \quad \text{pour} \quad |y| \geq 2$$

$$\varphi(y) \in [0,1]$$

$$\psi(y) = 1 \quad \text{pour} \quad y \geq 2$$

$$\psi(y) = 0 \quad \text{pour} \quad y \leq 1$$

$$\psi(y) \in [0,1]$$

Posons : $\zeta_n(y) = \varphi(\frac{y}{n}) \quad \psi(n\, y)$

on a $\zeta'_n(y) = \frac{1}{n} \quad \varphi'(\frac{y}{n}) \quad \psi(n\, y) + n\, \varphi(\frac{y}{n}) \quad \psi'(n\, y)$.

$y\, \zeta'_n(y)$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$. On voit de même que $y^2\, \zeta''_n(y)$ est aussi bornée sur $\mathbb{R}$, quand n varie

Soit donc $u \in \overset{\circ}{W}{}^2(\alpha\, ,\, A,\, B)$; les fonctions $u_n(y) = \zeta_n(y) \quad u(y)$ sont à support compact.

Vérifions qu'elles convergent vers u dans cet espace.

Le théorème de Lebesgue montre que $y^\alpha u_n$ tend vers $y^\alpha u$ dans $L^2_+(A)$; et on a :

$$u''_n(y) = \zeta''_n(y)\; u(y) + 2\; \zeta'_n(y)\; u'(y) \;+\; \zeta_n(y)\; u''(y) \qquad .$$

Le dernier terme tend vers u'' dans $L^2_+(B)$; les deux premiers tendent vers 0 puisque $\frac{u}{y^2}$ et $\frac{u'}{y}$ sont dans $L^2(B)$ (inégalité de Hardy, voir démonstration du théorème (I.1)). Ce qui démontre la densité voulue.

Supposons, donc que u soit à support compact ($u \in \overset{\circ}{W}{}^2(\alpha\, ,\, A\, ,\, B)$) . Posons :

$$w(\lambda\, ,\, y) = (Tu(y))(\lambda) \qquad (^1)$$

Considérons l'expression :

---

(1) T est l'isométrie entre B et H utilisée dans la démonstration du lemme (I.1) .

$$E = \left| y^{\frac{\alpha}{2}} u' \right|^2_{A^{1/2}\ B^{1/2}} = \int_0^\infty d\mu(\lambda) \int_0^\infty y^\alpha \lambda^{1/2} \left| \frac{\partial}{\partial y}(\lambda, y) \right|^2_{H(\lambda)} dy$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\text{(I.11)} \quad -E = \iint y^\alpha \lambda^{1/2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(\lambda, y), w(\lambda, y)\right)_{H(\lambda)} dy\, d\mu(\lambda)$$

$$+\alpha \iint y^{\alpha-1} \lambda^{1/2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}(\lambda, y), w(\lambda, y)\right)_{H(\lambda)} dy\, d\mu(\lambda)$$

Mais on a :

$$\text{(I.12)} \quad \left| \left(y^\alpha \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(\lambda, y), w(\lambda, y)\right) \right|_{H(\lambda)} \leq \left| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(\lambda, y) \right|^2_{H(\lambda)} + \left| y^\alpha \lambda^{\frac{1}{2}} w(\lambda, y) \right|^2_{H(\lambda)}$$

$$\text{(I.13)} \quad \left| \left(y^{\alpha-1} \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial w}{\partial y}(\lambda, y), w(\lambda, y)\right) \right|_{H(\lambda)} \leq \varepsilon \left| y^{\frac{\alpha}{2}} \lambda^{\frac{1}{4}} \frac{\partial w}{\partial y}(\lambda, y) \right|^2_{H(\lambda)} +$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| y^{\frac{\alpha-2}{2}} \lambda^{\frac{1}{4}} w(\lambda, y) \right|^2_{H(\lambda)}$$

où ε est un nombre réel positif quelconque.

Par intégration de (I.12) et (I.13) on obtient :

$$\text{(I.14)} \quad E \leq |u''|^2_{L^2_+(B)} + |y^\alpha u|_{L^2_+(A)} + \varepsilon |\alpha| \left| y^{\frac{\alpha}{2}} u' \right|^2_{A^{1/2}\ B^{1/2}}$$

$$+ \frac{|\alpha|}{\varepsilon} \left| y^{\frac{\alpha-2}{2}} u \right|^2_{A^{1/2}\ B^{1/2}}$$

Utilisons le théorème (I.1) avec $m = 2$ et $\theta = \frac{1}{2}$.

C désignant une constante indépendante de u on a :

$$\text{(I.15)} \qquad \left| y^{\frac{\alpha-2}{2}} u \right|^2_{A^{1/2}\ B^{1/2}} \leq C\, |u|_{\overset{\circ}{W}{}^2(\alpha, A, B)}$$

Et, finalement, en prenant ε suffisamment petit dans (I.14) , on obtient :

$$\left| y^{\frac{\alpha}{2}} u' \right|^2_{A^{1/2}\, B^{1/2}} \leqslant C |u|_{\overset{\circ}{W}{}^2(\alpha,\, A,\, B)}$$

Ce qui démontre la proposition par densité des fonctions à support compact dans $\overset{\circ}{W}{}^2(\alpha, A, B)$.

DEMONSTRATION DU THEOREME (I.3) :

Soit u appartenant à $W^2(\alpha, A, B)$ $(\alpha > -1)$

Posons $\gamma_o u = u(o)$ $\gamma_1 u = u'(o)$

Nous distinguons deux cas :

1°) $\alpha > -\frac{1}{2}$. Considérons le relèvement du lemme (I.1) avec $m = 2$; $j = o,1$.

Posons :

$$v = R_o\, \gamma_o\, u + R_1\, \gamma_1\, u$$

Nous savons que v est dans $W^2(\alpha, A, B)$.

Une démonstration semblable à celle du lemme (I.1) nous prouve aussi que :

$$v' \in W^1(\frac{\alpha}{2}, A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}}, B)$$

Comme $u - v \in \overset{\circ}{W}{}^2(\alpha, A, B)$, la proposition (I.1) et ce qui précède montrent que u' est bien dans $W^1(\frac{\alpha}{2}, A^{1/2} B^{1/2}, B)$.

2°) $-1 < \alpha \leqslant -\frac{1}{2}$. On voit sans peine que dans ce cas, nous avons : $\gamma_o u = o$.

Nous posons : $v = R_1\, \gamma_1\, u$

on vérifie que v' appartient à $W^1(\frac{\alpha}{2}, A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}}, B)$ et la suite du raisonnement utilisé en 1°) reste valable.

C.Q.F.D.

REMARQUE.I.2. : Sans la condition $\alpha > -1$, le théorème (I.3) serait faux. En effet, pour $-\frac{3}{2} < \alpha \leqslant -1$, il est facile de voir que l'on a pour tout $u \in W^1(\frac{\alpha}{2}, A^{1/2} B^{1/2}, B) : \gamma_o u = o$; il n'en est pas de même pour tout u' quand $u \in W^2(\alpha, A, B)$.

REMARQUE.I.3 : On ne démontre pas ici le résultat plus général suivant :

l'application $u \longmapsto u^{(j)}$ $(o \leqslant j < m)$ est continue de $W^m(\alpha, A, B)$ dans $W^{m-j}((1-\frac{j}{m})\alpha, A^{1-\frac{j}{m}} B^{\frac{j}{m}}, B)$ $((1-\frac{j}{m})\alpha > -\frac{1}{2})$.

Pour $\alpha = o$, c'est un résultat de [18] (voir aussi [20]).

REMARQUE.I.4. : Notons $\mathcal{W}^m(\alpha, A, B)$ l'espace des fonctions u vérifiant : $(y \in \mathbb{R})$

$$y^\alpha u \in L^2(A)$$
$$u^{(m)} \in L^2(B)$$

Il est facile de voir que tous les résultats précédents restent valables en remplaçant $W^m(\alpha, A, B)$ par $\mathcal{W}^m(\alpha, A, B)$.

REMARQUE.I.5. : Notons $W_T^m(\alpha, A, B)$ les restrictions des fonctions de $W^m(\alpha, A, B)$ à $[o,T]$ $(T < +\infty)$. On voit facilement que les théorèmes précédents sont encore valables en remplacant $W^m(\alpha, A, B)$ par $W_T^m(\alpha, A, B)$. Supposons maintenant, que l'injection de A dans B soit compacte. Il en est de même pour l'injection de $A^{1-\theta} B^\theta$ dans B pour $o \leq \theta < 1$ (voir [24]). Dans ce cas, l'application $u \longmapsto u^{(j)}$ $(j=o, \ldots, m-1)$ est compacte de $W_T^m(o, A, B)$ dans $L_T^2(B)$ (d'après [1]). D'autre part le théorème (I.2) nous donne, avec $\beta = o$:

$$\alpha \geqslant o \quad , \quad W_T^m(\alpha, A, B) \subset W_T^m(o, A^{\frac{m}{\alpha+m}} B^{\frac{\alpha}{\alpha+m}}, B)$$

nous en déduisons alors la compacité de l'application :

$$W_T^m(\alpha, A, B) \longrightarrow L_T^2(B)$$
$$u \longmapsto u^{(j)}$$

avec $j = 0,1, \dots m-1$.

II. APPLICATIONS. LEMMES DE COMMUTATION.

Désignons par $(x,y) = (x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ la variable de $\mathbb{R}^n$ et notons :

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad y > o\}$$

$\xi = (\xi_1, \dots \xi_{n-1})$ désignera la variable duale de $x \in \mathbb{R}^{n-1}$.

s étant un nombre réel, $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ est l'espace de Sobolev des distributions f , tempérées sur $\mathbb{R}^{n-1}$ vérifiant :

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}) = H^\circ(\mathbb{R}^{n-1})$$

avec la norme :

$$|f|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} = |(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi)|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$\hat{f}$ désignant la transformée de Fourier de f . $L^2_+(H^s(\mathbb{R}^{n-1}))$ est donc l'espace des distributions u tempérées dans $\mathbb{R}^n_+$ telles que :

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi, y) \in L^2_+(H^\circ) = L^2(\mathbb{R}^n_+)$$

$\hat{u}$ désignant la transformée de Fourier partielle de u par rapport à x .

Soit r un nombre réel ; notons T_r l'opérateur défini par : $\quad (\widetilde{T_r u})(\xi, y) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{r}{2}} \hat{u}(\xi, y)$

T_r est une isométrie entre $L^2_+(H^s(\mathbb{R}^{n-1}))$ et $L^2_+(H^{s-r}(\mathbb{R}^{n-1}))$

pour tout nombre réel s .

Enfin si $a \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ [1] , les deux applications suivantes, sont continues pour tout s :

$$\text{(I.16)} \qquad L^2_+(H^s(\mathbb{R}^{n-1})) \longrightarrow L^2_+(H^s(\mathbb{R}^{n-1}))$$
$$u \longmapsto a\,u$$

$$\text{(I.17)} \qquad L^2_+(H^s(\mathbb{R}^{n-1})) \qquad L^2_+(H^{s-r+1}(\mathbb{R}^{n-1})) \qquad [2]$$
$$u \longmapsto [a, T_r]\,u$$

(voir par exemple [32] [13])

Avec les notations du paragraphe précédent, nous prenons $A = H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ $(s>o)$ et $B = H^\circ(\mathbb{R}^{n-1})$ et nous posons :

$$W^m(\alpha\,,\ H^s(\mathbb{R}^{n-1})\ ,\ H^\circ(\mathbb{R}^{n-1})) = W^m(\alpha\,,\ s) \qquad .$$

Supposons $\alpha > -\frac{1}{2}$. Par prolongement à $\mathbb{R}^n$ tout entier (procédé de Babitch par exemple), tronquature et régularisation, on peut voir que $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est dense dans $W^m(\alpha\,,\ s)$. Il en est de même de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $\overset{\circ}{W}{}^m(\alpha\,,\ s)$.

Nous allons donner, maintenant un certain nombre de lemmes de commutation qui nous seront utiles par la suite.

Soient P et Q deux opérateurs différentiels (en toutes les variables) d'ordre inférieur ou égal à 1, à coefficients

---

(1) Si E est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, on désignera par $\mathcal{D}(E)$ les fonctions définies, et à support compact dans E , qui sont restrictions à E de fonctions indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}^n$.

(2) Si P et Q sont deux opérateurs on note $[P,Q]$ leur commutateur $PQ - QP$.

$\mathscr{C}^\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ tels que :

(I.18) pour tout s $\quad [P, T_s] = [Q, T_s] = o$

Soient $a, \zeta, \beta \in \mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, et r, t deux nombres réels .

Posons : $\quad M = \beta\, T_r\, \zeta$

(donc $M^* = \zeta\, T_r\, \beta$) on a :

LEMME.I.2. : Il existe une constante C telle que pour tout $v \in \mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ on ait :

$$|(a\, P\, M\, v\, ,\, Q\, M\, v) - (a\, P\, v\, ,\, Q\, M^*\, M\, v)| \leq$$

$$c\{(|T_{r-1}\, P\, v|_o + |T_r v|_o)\; |Q\, M\, v|_o + |T_{r-t}\, P\, v|_o \cdot |T_t M\, v|_o\}$$

Le produit scalaire (,) et la norme $|\;|_o$ étant ceux de $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ [1] .

La constante C dépend des données r.t... mais non de v

DEMONSTRATION :

On a :

(I.19) $(a\, P\, M\, v\, ,\, Q\, M\, v) - (a\, P\, v\, ,\, Q\, M^*\, M\, v) =$

$$([a\, P, M]\, v\, ,\, Q\, M\, v) + (a\, P\, v\, ,\, [Q, M^*]\, M\, v)$$

Etudions le crochet $[a\, P, M]$. En utilisant (I.18) on obtient :

$$[a\, P\, ,M] = a\,[P,\beta]\; T_r\zeta + a\,\beta\, T_r\; [P,\zeta\,] + \beta\,[a,\, T_r]\;\; \zeta\, P$$

Comme $[P,\beta]$ et $[P,\zeta\,]$ sont des fonctions, on voit que les deux premiers termes sont des opérateurs tangentiels d'ordre

---

[1] Plus généralement on notera $(\;,\;)_s$ et $|\;|_s$ le produit scalaire et la norme de $H^s(\mathbb{R}^n_+)$. (s entier).

r [1] . En utilisant (I.17) on a bien :

$$|[a\ P, M]v|_o \leq C(|T_{r-1}\ P\ v|_o + |T_r\ v|_o)$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz au premier produit scalaire du second membre de (I.19), nous obtenons le résultat désiré.

Nous voyons de même que $[Q,M^*]$ est tangentiel d'ordre r , et nous avons :

$$|(a\ P\ v\ ,\ [Q,M^*]\ M\ v)| = |(T_{r-t}a\ P\ v\ ,\ T_{-r+t}\ [Q,M^*]\ M\ v)|$$

$$\leq C\ |T_{r-t}\ P\ v|_o\ |T_t\ M\ v|_o$$

C.Q.F.D.

Voici deux applications de ce lemme :

LEMME.I.3. : il existe une constante C telle que pour tout $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ on ait :

$$|(a\ P\ M\ v\ ,\ Q\ M\ v) - (a\ P\ v\ ,\ Q\ M^*\ M\ v)| \leq C\ |T_{r-1}v|_1\ |M\ v|_1$$

Il suffit de prendre $t = 1$ dans le lemme I.2 et d'utiliser le fait que P et Q sont d'ordre 1 .

LEMME.I.4. : Soit ρ un nombre réel positif ou nul, et supposons que P et Q sont arbitrairement l'un des opérateurs suivants :

$$D_y\ ,\ y^\rho D_{x_i}\ (i=1,\ldots\ n-1),\ \text{identité.}$$

On a alors, pour tout $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$

---

[1] Un opérateur tangentiel d'ordre r est un opérateur qui envoie continument $L^2_+(H^s(R^{n-1}))$ dans $L^2_+(H^{s-r}(R^{n-1}))$ pour tout s.

$$|(a\ P\ M\ v,\ Q\ M\ v) - (a\ P\ v\ ,\ Q\ M^{*}\ M\ v)| \leqslant$$

$$C\ \left|T_{r-\frac{1}{\rho+1}}\ v\right|_{W^1(\rho,1)}\ \left|M\ v\right|_{W^1(\rho,1)}$$

DEMONSTRATION :

Il suffit de prendre $t = \frac{1}{\rho+1}$ dans le lemme (I.2) et de remarquer que l'on a :

$$|P\ T_{r-1}v|_o \leqslant C\ |T_{r-1}v|_{W^1(\rho,1)} \leqslant \left|T_{r-\frac{1}{\rho+1}}\ v\right|_{W^1(\rho,1)} \qquad \text{(puisque } \frac{1}{\rho+1} \leqslant 1\text{)}$$

$$|Q\ M\ v|_o \leqslant C\ |M\ v|_{W^1(\rho,1)}$$

$$\left|P\ T_{r-\frac{1}{\rho+1}}\ v\right|_o \leqslant C \left|T_{r-\frac{1}{\rho+1}}\ v\right|_{W^1(\rho,1)}$$

$$|T_r\ v|_o \leqslant \left|T_{r-\frac{1}{\rho+1}}\ v\right|_{W^1(o,\frac{1}{\rho+1})} \leqslant C \left|T_{r-\frac{1}{\rho+1}}\ v\right|_{W^1(\rho,1)}$$

La deuxième inégalité a lieu en vertu du théorème (I.2) avec $m=1$, $\alpha=\rho$ et $\beta=o$. Enfin, pour la même raison on a :

$$\left|T_{\frac{1}{\rho+1}}\ M\ v\right|_o \leqslant |M\ v|_{W^1(o,\frac{1}{\rho+1})} \leqslant C |M\ v|_{W^1(\rho,1)} \ .$$

Nous aurons besoin de la variante suivante du lemme (I.2) .

LEMME.I.5. : Les données étant celles du lemme (I.2), soit ρ un nombre réel $> \frac{1}{2}$ et $N = \beta\, y^{\rho}\, T_r\, \zeta$. On a pour tout $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$

$$|(a\ P\ N\ v\ ,\ Q\ N\ v) - (a\ P\ v\ ,\ Q\ N^{*}\ N\ v)| \leqslant$$

$$C\left\{\left(|T_r y^{\rho-1}\ v|_o + |T_{r-1}\ P\ v|_o\right)\ |Q\ N\ v|_o + |T_{r-t} P\ v|_o\ |T_t y^{\rho-1} N v|_o\right\}$$

où C est une constante indépendante de v .

La démonstration est semblable à celle du lemme (I.2) . On utilise en plus les remarques suivantes :

$$[a P , N] v = S y^{\rho-1} v + R P v$$

où S et R sont des opérateurs tangentiels d'ordre r et $r-1$ respectivement .

$$[N^*, Q] v = U y^{\rho-1} v$$

où U est tangentiel d'ordre r .

Nous en déduisons :

LEMME.I.6. : Les notations sont celles du lemme précédent. On suppose que P et Q sont arbitrairement l'un des opérateurs :

$$D_y \ , \ y^\rho D_{x_i} \ , \text{ identité}$$

on a, pour tout $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$:

$$\left|(a P N v , Q N v) - (a P v, Q N^* N v)\right| \leq C \left|T_{r-\frac{\rho}{\rho+1}} v\right|_{W^1(\rho,1)} \left|N v\right|_{W^1(\rho,1)}$$

DEMONSTRATION :

On prend $t = \frac{\rho}{\rho+1}$ dans le lemme (I.5) et on utilise l'inclusion :

$$W^1(\rho,1) \subset W^1(\rho-1 , \tfrac{\rho}{\rho+1}) \quad (\text{th.I.2})$$

On a alors :

$$\left|T_r y^{\rho-1} v\right|_0 \leq \left|T_{r-\frac{\rho}{\rho+1}} v\right|_{W^1(\rho-1,\frac{\rho}{\rho+1})} \leq C \left|T_{r-\frac{\rho}{\rho+1}} v\right|_{W^1(\rho,1)}$$

$$\left|T_t y^{-1} N v\right|_0 \leq C \left|N v\right|_{W^1(\rho,1)}$$

$$\left|T_{r-1} P v\right|_{o} \leq \left|T_{r-1} v\right|_{W^{1}(\rho,1)} \leq \left|T_{r-\frac{\rho}{\rho+1}} v\right|_{W^{1}(\rho,1)}$$

(puisque $\frac{\rho}{\rho+1} < 1$)

Et enfin :

$$\left|Q N v\right|_{o} \leq \left|N v\right|_{W^{1}(\rho,1)}$$

$$\left|T_{r-\frac{\rho}{\rho+1}} P v\right|_{o} \leq \left|T_{r-\frac{\rho}{\rho+1}} v\right|_{W^{1}(\rho,1)}$$

En portant ces majorations dans le résultat du lemme I.5 ($t = \frac{\rho}{\rho+1}$) nous obtenons le résultat annoncé.

CHAPITRE II

REGULARITE AU BORD

I. REGULARISATION ELLIPTIQUE.

Considérons la situation suivante, bien classique dans l'étude des problèmes elliptiques par la méthode variationnelle. (voir [17] par exemple).

Soient V et H deux espaces de Hilbert, V étant contenu, et dense dans H, avec injection continue. On identifie H à son antidual et on désigne par V' l'antidual de V. Il résulte, de la densité de V dans H, que l'on a :

$$V \subset H \subset V' .$$

Les injections étant continues.

On se donne une forme sesquilinéaire a continue sur $V \times V$, ou, ce qui revient au même, une application A linéaire continue de V dans V' telle que :

$$a(u,v) = \langle Au, v \rangle$$

pour tout $(u,v) \in V \times V$; où $\langle \ , \rangle$ désigne l'antidualité entre V et V'.

Nous supposons, en outre, que a vérifie l'hypothèse de <u>V-coercitivité</u> suivante :

$$\text{(II.1)} \quad \begin{cases} \text{Il existe une constante } \alpha > 0 \text{ telle que pour tout} \\ v \in V : \qquad \operatorname{Re} a(v,v) \geq \alpha |v|_V^2 . \end{cases}$$

Sous l'hypothèse (II.1) nous savons (lemme de Lax-Milgram) que :

<u>A est un isomorphisme entre V et V'</u>

ou

<u>Pour tout $f \in V'$, il existe $u \in V$ unique tel que</u> :

(II.2) $a(u,v) = \langle f , v\rangle$ pour tout $v \in V$.

On peut être amené à approcher la solution u de la manière qui suit.

Soit W un autre espace de Hilbert, avec $W \subset V$ (algébriquement et topologiquement) W étant dense dans V. On a alors :

$$W \subset V \subset H \subset V' \subset W' \quad .$$

Soit ε_j une suite de nombre réels > 0 tendant vers 0 . Considérons les formes :

$$a_j(u,v) = \varepsilon_j(u,v)_W + a(u,v)$$

les a_j sont continues sur $W \times W$ et sont W-coercitives.

Le "second membre" f étant fixé dans V', soit $f_j \in V'$ une suite telle que :

$$\lim_{V'} f_j = f$$

Nous désignons par u_j la solution dans W de :

(II.3) $a_j(u_j , w) = \langle f_j , w\rangle$ pour tout $w \in W$

Une telle solution existe et est unique dans W d'après le lemme de Lax-Milgram cité ci-dessus.

Remarquons que la résolution de (II.3) est équivalente à celle de :

$$(II.3') \quad \begin{cases} \text{trouver } u_j \in W \text{ tel que :} \\ \varepsilon_j \Lambda u_j + A u_j = f_j \end{cases}$$

où Λ est linéaire continue de W dans W' vérifiant pour tout v , $w \in W$:

$$(v,w)_W = < \Lambda v,w >_{W' \times W}$$

Nous avons la proposition :

PROPOSITION.II.1. La solution u de (II.2) est limite faible dans V d'une sous suite extraite de (u_j) , solutions de (II.3). De plus $\sqrt{\varepsilon_j} \, |u_j|_W$ reste bornée quand j varie.

DEMONSTRATION :

Prenons $w=u_j$ dans (II.3) et utilisons la V-coercitivité de a ; nous obtenons :

$$(II.4) \quad \varepsilon_j |u_j|_W^2 + \alpha |u_j|_V^2 \leq \mathrm{Re} < f_j , u_j>$$
$$\leq |f_j|_{V'} |u_j|_V$$

Comme f_j est convergente dans V' , la quantité $|f_j|_{V'}$ reste bornée. Nous déduisons donc de (II.4) que les deux expressions :

$$\sqrt{\varepsilon_j} \, |u_j|_W \quad \text{et} \quad |u_j|_V$$

restent aussi bornées quand j varie.

Par compacité faible de la boule unité de V [4], on en déduit qu'il est possible d'extraire de la suite u_j une sous suite (que l'on notera encore u_j) faiblement convergente dans V vers $\tilde{u}$

Pour chaque w fixé dans W faisons tendre j vers l'infini dans (II.3) ; on trouve :

$$a(\tilde{u},w) = \langle f , w \rangle$$

[en effet $\varepsilon_j(u_j , w)_W = \sqrt{\varepsilon_j}(\sqrt{\varepsilon_j} \; u_j , w)_W$ tend vers o

$a(u_j , w)$ tend vers $a(\tilde{u} , w)$

et $\langle f_j , w\rangle$ tend vers $\langle f , w \rangle$].

La densité de W dans V et (II.2) prouvent alors que $\tilde{u} = u$.

C.Q.F.D.

Revenons à la "<u>régularité</u>" de la solution de (II.2) . Il arrive, qu'avec des hypothèses supplèmentaires sur le "second membre" f (en plus de $f \in V'$), nous puissions démontrer que :

(II.5) $\qquad u \in D(L_\alpha)$

où les L_α sont des opérateurs fermés, non bornés dans H , $D(L_\alpha)$ étant le domaine de L_α . C'est ce que nous entendons par régularité de u .

Voici comment nous utiliserons l'approximation précédente (proposition (II.1)) .

Supposons que les solutions u_j de (II.3) appartiennent à $D(L_\alpha)$. Pour montrer (II.5) il suffit de prouver que :

(II.6) $\qquad |L_\alpha u_j|_H$ reste bornée.

En effet, en extrayant au besoin une sous suite, on a :

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{dans } H \text{ faible}$$

$$L_\alpha u_j \longrightarrow g \quad \text{dans } H \text{ faible}$$

comme L_α est fermé on obtient :

$$g = L_\alpha u$$

et u est bien dans $D(L_\alpha)$.

Nous approchons donc le problème (II.2) par le problème plus "régulier" (II.3) et nous regardons dans quelle mesure la "régularité" passe à la limite (en montrant (II.6)).

Nous allons utiliser ces idées dans les paragraphes suivants.

Notons que des "régularisations" semblables ont été employées dans [14] [15] [16] [31] ... .

II. OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERANT AU BORD.

Nous désignons par $x = (x_1, \dots x_n)$ la variable de $\mathbb{R}^n$ et nous utilisons les notations habituelles :

$$D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k} \qquad \text{avec} \quad i = \sqrt{-1}$$

si $j = (j_1, \dots j_n)$, on pose :

$$D^j = D_1^{j_1} \dots D_n^{j_n} \qquad |j| = \sum_{k=1}^{n} j_k$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de bord Γ. Nous supposons que Γ est une variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension $n-1$, et que Ω est localement situé du même côté de Γ.

$H^m(\Omega)$ (m entier) désignera l'espace habituel de Sobolev sur Ω. Sa norme sera notée $|\ |_m$.

Soit φ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\text{(II.7)} \begin{cases} d\varphi \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma \ (d\varphi \text{ étant la différentielle de } \varphi) \\ \Gamma = \{x \mid \varphi(x) = 0\} \quad ; \ \Omega = \{x \mid \varphi(x) > 0\} \end{cases}$$

On se donne un opérateur Λ défférentiel du premier ordre à coefficients réels et $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$.

On suppose que Λ est <u>transversal</u> à Γ [1]

Nous pouvons nous ramener, localement, au cas du demi-espace :

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x', y) = (x'_1, \dots x'_{n-1}, y) \quad y > o\}$$

Plus précisément, soit $x_o \in \Gamma$, il existe $\mathcal{O}$ un voisinage ouvert dans $\mathbb{R}^n_x$ et un difféomorphisme θ $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{O}$ sur un ouvert B de $\mathbb{R}^n_{(x',y)}$ $((\mathcal{O},\theta)$ est une carte locale) tels que :

$$\text{(II.8)} \begin{cases} \theta(\Gamma \cap \mathcal{O}) = B \cap \{y=o\} \\ \theta(\Omega \cap \mathcal{O}) = B \cap \{y>o\} = B_+ \end{cases}$$

Enfin Λ se transforme en $\alpha(x',y)\, D_y$ où $\alpha(x', y)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas dans B ; c'est-à-dire que pour toute fonction u définie dans $\mathcal{O}$ (ou dans $\Omega \cap \mathcal{O}$) on a :

$$\text{(II.8')} \qquad (\Lambda\, u) \circ \theta^{-1} = \alpha D_y(u \circ \theta^{-1}) \qquad [2]$$

<u>La forme a</u>

On se donne maintenant une forme intégro-différentiable définie par :

---

[1] Ecrivons $\Lambda = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\, D_k$. La transversalité de Λ à Γ veut dire que le vecteur $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$ est non nul et non tangent à Γ pour $x \in \Gamma$.

---

[2] On peut définir θ au voisinage de x_o par :

$$x'_i = \theta_i(x) \qquad 1 \leq i \leq n-1$$
$$y = \varphi(x)$$

les fonctions θ_i étant $n-1$ fonctions indépendantes solutions de :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, D_k\, \theta_i = o$$

Comme $\sum_{k=1}^{n} \alpha_i\, D_i\, \varphi \neq o$ au voisinage de x_o (d'après la transversalité de Λ), θ , ainsi défini est bien un changement de variables au voisinage de x_o et on a bien (II.8') dans le même voisinage.

(II.9) pour $u,v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $b(u,v) = \displaystyle\int_{\Omega} \sum_{\substack{0 \leq |i| \leq 1 \\ 0 \leq |j| \leq 1}} b_{ij}(x) D^i u(x) D^j v(x)\, dx$

avec $b_{ij} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

On suppose que b est elliptique, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition de <u>$H^1(\Omega)$-coercitivité</u> suivante :

$$\text{(II.10)} \begin{cases} \text{il existe une constante } \alpha \text{ telle que :} \\ \text{pour tout } \quad u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \quad \mathrm{Re}\ b(u,u) \geq \alpha\ |u|_1^2 \end{cases}$$

On notera $B(x,D) = B(D)$ l'opérateur différentiel elliptique du second ordre associé à b :

$$B(D) = \sum_{i,j} D^j\, b_{ij}(x)\, D^i$$

(On sait que (II.10) entraîne l'ellipticité de $B(D)$).

ρ désignant un entier ≥ 1 , définissons la forme suivante :

(II.11) $a(u,v) = (\Lambda\, u , \Lambda\, v) + b(\varphi^{\rho} u , \varphi^{\rho} v)$

pour $u , v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. $(,)$ est le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

Notons $A(D)$ l'opérateur différentiel associé à a :

(II.11') $A(D) = \Lambda^* \Lambda + \varphi^{\rho} B(D) \varphi^{\rho}$

Λ^* étant l'adjoint formel de Λ .

Remarquons que $A(D)$ est elliptique en tout point de Ω , mais, il dégénère en tout point de Γ .

Nous allons étudier, maintenant, des problèmes aux limites relatifs à $A(D)$.

<u>Les espaces.</u>

Désignons par $S(\Omega , \varphi , \rho , \Lambda) = S$ l'espace des distributions u sur Ω vérifiant :

$$(\text{II}.12) \quad \begin{cases} \varphi^{\rho} u \in H^1(\Omega) \\ \Lambda \ u \in H^{o}(\Omega) \end{cases}$$

Nous munissons S de la norme définie par :

$$|u|_S^2 = |\varphi^{\rho} u|_1^2 + |\Lambda u|_o^2$$

qui en fait un espace de Hilbert.

Notons $\overset{o}{S}$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans S .

Nous avons les propriétés suivantes :

PROPOSITION.(II.2) :

1°) S est contenu dans $H^{o}(\Omega) \cap H^1_{loc}(\Omega)$ algébriquement et topologiquement.

2°) Si $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, l'application $u \longmapsto \psi u$ est continue de S dans S .

3°) $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans S .

L'application $u \longmapsto \gamma u$ (trace de u sur Γ) définie dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ à valeur dans $\mathcal{D}(\Gamma)$, se prolonge en une application continue, linéaire et surjective de S dans $H^{\frac{1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$, qui admet un inverse à droite continu. Le noyau de γ est $\overset{o}{S}$.

DEMONSTRATION :

1°) φ étant strictement positive dans Ω , nous obtenons à partir de (II.12) l'inclusion de S dans $H^1_{loc}(\Omega)$. Pour montrer l'inclusion de S dans $H^{o}(\Omega)$, il suffit de le faire au voisinage des points de Γ . On se ramène par carte locale à l'espace des v telles que :

$$y^{\rho} v \in H^{1}(K)$$
$$D_{y} v \in H^{\circ}(K)$$

où K est un cube de $\mathbb{R}^{n}_{+}$. Cet espace est bien contenu dans $H^{\circ}(K)$.

2°) Ce point résulte immédiatement du précédent.

3°) Soit $(\mathcal{O}, \theta)$ une carte locale au voisinage d'un point de Γ . Si $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \cap \bar{\Omega})$ on a (en utilisant (II.8)) :

$$(\zeta u) \circ \theta^{-1} \in W^{1}(\rho, 1) \quad .$$

La proposition résulte alors, par partition de l'unité , de la caractérisation des traces des fonctions de $W^{1}(\rho, 1)$ [c'est l'espace $H^{\frac{1}{2(\rho+1)}}(\mathbb{R}^{n-1})$ voir chap. I démonstration du théorème I.2] . Le relèvement de γ est une conséquence du lemme I.1 ; enfin la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n}_{+})$ dans $\mathring{W}^{1}(\rho, 1)$ montre que le noyau de γ est bien $\mathring{S}$.

REMARQUE. II. 1. En utilisant une partition de l'unité convenable, et la remarque (I.5) , on montre facilement que l'inclusion de S dans $H^{\circ}(\Omega)$ est compacte.

Revenons aux problèmes variationnels relatifs à la forme a définie par (II.11). Notons qu'il résulte de (II.10) et de la définition de S (II.12) que a est S-coercitive. Nous allons considérer les deux cas suivants : (les notations sont celles du paragraphe 1 de ce chapitre) cas I : Nous prenons :

$$\text{(II.13)} \quad H = H^{\circ}(\Omega) \quad , \quad V = \mathring{S} \quad , \quad W = \mathring{H}^{1}(\Omega)$$

La densité de W dans V résulte de celle de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans ces deux espaces.

cas II : Nous prenons :

$$\text{(II.14)} \quad H = H^{\circ}(\Omega) \quad V = S \quad W = H^{1}(\Omega)$$

De même, la densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans ces espaces (proposition (II.2) 3°)) montre la densité de W dans V .

Signalons que le cas I correspond à un problème de Dirichlet homogène. Nous verrons que le cas II correspond à un problème de Neumann.

III. REGULARITE (SECOND MEMBRE DANS $L^2(\Omega)$).

Commençons d'abord par définir un nouvel espace de fonctions sur Ω .

Désignons par $G(\Omega , \varphi , \rho , \Lambda) = G$ l'espace des distributions u définies dans Ω , et telles que :

$$\text{(II.15)} \quad \begin{cases} \varphi^2 \rho\, u \in H^2(\Omega) \\ \Lambda^2\, u \in H^{\circ}(\Omega) \end{cases}$$

On munit G de la norme :

$$|u|_G^2 = |\varphi^2 \rho\, u|_2^2 + |\Lambda^2\, u|_o^2$$

qui en fait un espace de Hilbert.

Nous avons les propriétés suivantes :

PROPOSITION.II.3.

1°) Si $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'application $u \longmapsto \psi u$ est continue de G dans G.

2°) G est contenu algébriquement et topologiquement dans $H^\circ(\Omega) \cap H^2_{loc}(\Omega)$. De plus, les applications $u \longmapsto \varphi^{\rho-1} u$ et $u \longmapsto \varphi^{\rho} \Lambda u$ sont continues de G dans $H^1(\Omega)$.

3°) $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans G , et l'application $u \mapsto (\gamma u , \gamma \Lambda u)$ (traces de u et de Λ u sur Γ), définie dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ à valeur dans $\mathcal{D}(\Gamma)^2$, se prolonge en une application linéaire, continue et surjective de G dans $H^{\frac{3}{2(\rho+1)}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$ qui admet un inverse à droite continu.

DEMONSTRATION : Par restriction à une carte locale, voisinage d'un point de Γ , on se ramène à l'espace des v telles que :

$$y^{2\rho} v \in H^2(K)$$

$$D_{y^2} v \in H^\circ(K)$$

où K est un cube de $\mathbb{R}^n_+$ dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Pour une telle v on a bien :

$$v \ , \ D_y v \in H^\circ(K)$$

On en déduit, alors, que si $u \in G$ on a :

$$u \ ; \ \Lambda u \in H^\circ(\Omega)$$

(les applications étant continues)

Ceci démontre le 1°) et l'inclusion de G dans $H^\circ(\Omega) \cap H^2_{loc}(\Omega)$

Par partition de l'unité, il est facile de voir que nous avons la caractérisation suivante de G :

(II.16) $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour que } u \text{ appartienne à } G \text{ il faut et il suffit que} \\ u \text{ soit dans } H^2_{loc}(\Omega)\text{, et que, pour toute carte locale} \\ \mathcal{O}\text{, voisinage d'un point de } \Gamma\text{, et pout toute} \\ \zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \cap \overline{\Omega}) \text{ on ait :} \\ \qquad \zeta u \in W^2(2\rho, 2)\end{array}\right.$

[Pour alléger l'écriture nous notons aussi ζu la fonction $\zeta u \circ \theta^{-1}$ (voir (II.8)), ainsi que son prolongement par 0 dans $\mathbb{R}^n_+$ en dehors de B_+ .]

La continuité des applications $u \longmapsto \varphi^{\rho-1} u$ et $u \longmapsto \varphi^{\rho} \Lambda u$ de G dans $H^1(\Omega)$ se déduit, alors, de celle de :

$$W^2(2\rho, 2) \longrightarrow W^2(\rho-1, 1)$$
$$u \longmapsto u$$
$$W^2(2\rho, 2) \longrightarrow W^1(\rho, 1)$$
$$u \longmapsto D_y u$$

qui résulte des théorèmes (I.2) et (I.3) .

Enfin le 3°) est immédiat à partir de l'étude des traces de $W^2(2\rho, 2)$ (voir démonstration du th. I.2)

C.Q.F.D.

REMARQUE.II.2. Il résulte du 2°) que l'on a :

α) L'inclusion de G dans S .

β) La continuité de l'application $u \longmapsto \Lambda u$ de G dans S .

γ) La continuité de $u \longmapsto A(D)\, u$ ($A(D)$ défini par (II.11')) de G dans $H^\circ(\Omega)$.

Voici maintenant le théorème principal :

THEOREME.II.1. Soient $f \in H = H^\circ(\Omega)$ et u la solution de (II.2) dans l'un des cas (II.13) ou (II.14).
Alors u appartient à G défini par (II.15).

DEMONSTRATION : Nous traitons simultanément le cas I et II.

$A(D)$ étant elliptique dans Ω, il résulte d'un théorème bien connu ([7] [30]) que $u \in H^2_{loc}(\Omega)$. Nous allons donc nous intéresser à la "régularité au bord". Plus précisément pour montrer que $u \in G$, il suffit de prouver, en utilisant la caractérisation (II.16), que :

$$\text{(II.17)} \quad \begin{cases} \text{Pour toute carte locale } \theta \text{ voisinage d'un point de } \Gamma, \\ \text{et tout } \zeta \in \mathcal{D}(\theta \cap \overline{\Omega}) \text{ on a} \\ \qquad \zeta u \in W^2(2\rho, 2) \end{cases}$$

Prenons pour f_j une suite de fonctions $\mathcal{E}^\infty$ dans $\overline{\Omega}$ convergente vers f dans $H^\circ(\Omega)$. D'après un théorème de Nirenberg [30], nous savons que $u_j \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (u_j étant la solution de (II.3)).

Commençons par démontrer le lemme suivant :

LEMME.II.1. Pour toute carte locale θ, voisinage d'un point de Γ, et tout $\zeta \in \mathcal{D}(\theta \cap \overline{\Omega})$ l'expression suivante :

$$\left| T_{\frac{1}{\rho+1}} \zeta u_j \right|_{W^1(\rho, 1)}$$

reste bornée quand j varie.

CONSEQUENCES : On montre facilement (voir paragraphe 1) que l'on a, à partir de ce lemme :

$$T_{\frac{1}{\rho+1}} \quad \zeta u \in W^1(\rho, 1)$$

En utilisant le théorème (I.2), on en déduit :

$$\zeta u \in W^1(\rho - 1, 1)$$

En particulier :

$$\varphi^{\rho - 1} u \in H^1(\Omega)$$

Notons que ceci résulte de (II.17) (par le th.(I.2)), et est donc une conséquence du théorème (II.1).

Preuve du lemme (II.1).

ζ étant donnée, soit $\beta \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \cap \bar{\Omega})$ telle que

$\beta = 1$ sur le support de ζ.

Posons : $M = \beta \, T_{\frac{1}{\rho+1}} \zeta$ et considérons les expressions :

$$A_j = a_j(M u_j \,, M u_j)$$

$$B_j = a_j(u_j \,, M^* M u_j)$$

Notons que $M u_j$ et $M^* M u_j$ sont bien dans $\mathring{H}^1(\Omega)$ dans le cas I, et dans $H^1(\Omega)$ dans le cas II.

Utilisons les lemmes (I.3) et (I.4) en prenant pour $v = \beta u_j$ et pour $r = \frac{1}{\rho+1}$, il vient : [1]

$$\text{(II.18)} \qquad \left|A_j - B_j\right| \leq C \left\{ \left|\beta u_j\right|_{W^1(\rho,1)} \left|M u_j\right|_{W^1(\rho,1)} + \varepsilon_j \left| T_{\frac{1}{\rho+1} - 1} \beta u_j \right|_1 \cdot \left| M u_j \right|_1 \right\}$$

---

[1] les expressions A_j et B_j ne changent pas, si on remplace u_j par βu_j.

En utilisant la S-coercitivité de a nous obtenons :

$$\text{(II.19)} \qquad \varepsilon_j \, |M u_j|_1^2 + C \, |M u_j|^2_{W^1(\rho,1)} \leq \operatorname{Re} A_j \leq |A_j|$$

Enfin nous avons, par définition des u_j :

$$|B_j| = |(f_j , M^* M u_j)| \leq |f_j|_o \, |M^* M u_j|_o$$

Comme M^* est un opérateur tangentiel d'ordre $\frac{1}{\rho+1}$ et que l'on a l'inclusion : $W^1(\rho,1) \subset W^1(o,\frac{1}{\rho+1})$ (par le th.I.2), nous obtenons :

$$\text{(II.20)} \qquad |B_j| \leq C \, |f_j|_o \, |M u_j|_{W^1(\rho,1)}$$

Nous en déduisons de II. 18 - 19 et 20 , où les constantes C (différentes !) sont indépendantes de j :

$$\text{(II.21)} \quad \varepsilon_j \, |M u_j|_1^2 + C |M u_j|^2_{W^1(\rho,1)} \leq C' \Big\{ |M u_j|_{W^1(\rho,1)} \left(|f_j|_o + |\beta u_j|_{W^1(\rho,1)} \right) + \varepsilon_j \, |\beta u_j|_1 \, |M u_j|_1 \Big\} \quad (^1)$$

On sait , d'autre part, (proposition II.1) que les expressions : $|u_j|_S$, $\sqrt{\varepsilon_j}\,|u_j|_1$ et $|f_j|_o$ sont bornées quand j varie.

Comme on a :

$$|\beta u_j|_{W^1(\rho,1)} \leq C \, |u_j|_S$$

$$|\beta u_j|_1 \leq C \, |u_j|_1$$

---

(1) comme $\frac{1}{\rho+1} - 1 < o$ nous avons bien :

$$\left| T_{\frac{1}{\rho+1} - 1} \, \beta u_j \right|_1 \leq |\beta u_j|_1$$

On obtient que le premier membre de (II.21) reste borné quand j varie. En particulier, il en est de même pour :

$$\left| M\, u_j \right|_{W^1(\rho,1)}$$

Nous pouvons écrire, puisque $M = \beta\, T_{\frac{1}{\rho+1}}\, \zeta$

$$T_{\frac{1}{\rho+1}}\, \zeta\, u_j = M\, u_j + \left[T_{\frac{1}{\rho+1}}\, , \beta \right] \zeta\, u_j$$

et nous obtenons le lemme, en remarquant que la norme du second membre dans $W^1(\rho,1)$ est bornée quand j varie.

C.Q.F.D.

LEMME.II.2. Pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(\theta \cap \bar{\Omega})$, où θ est une carte locale, voisinage d'un point de Γ, nous avons :

$$y^\rho\, T_1\, \zeta\, u \in W^1(\rho,1)$$

Preuve du lemme (II.2).

Soit $\beta \in \mathcal{D}(\theta \cap \bar{\Omega})$ avec $\beta\zeta = \zeta$. Posons $N = y^\rho \beta T_1 \zeta$.

Nous considérons les expressions :

$$C_j = a_j(N\, u_j\ ,\ N\, u_j)$$
$$D_j = a_j(u_j\ ,\ N^* N\, u_j)$$

Utilisons le lemme (I.6) avec $v = \beta u_j$ et $r = 1$. Il vient :

$$\text{(II.22)} \qquad \left| C_j - D_j \right| \leq C \Big\{ \left| T_{\frac{1}{\rho+1}}\, \beta u_j \right|_{W^1(\rho,1)} \left| N\, u_j \right|_{W^1(\rho,1)} + \varepsilon_j \left| \beta u_j \right|_1 \left| N\, u_j \right|_1 \Big\}$$

La S-coercitivité de a nous donne :

(II.23) $\quad \varepsilon_j \left| N\ u_j \right|_1^2 + c \left| N\ u_j \right|^2_{W^1(\rho,1)} \leq |A_j|$

Nous avons d'autre part :

$$D_j = (f_j\ ,\ N^* N\ u_j)_o$$

Soit :

(II.24) $\quad |D_j| \leq C\ |f_j|_o\ |N\ u_j|_{W^1(\rho,1)}$

Et, finalement, nous déduisons de II. 22 - 23 et 24 :

(II.25) $\quad \varepsilon_j \left| N\ u_j \right|_1^2 + c \left| N\ u_j \right|^2_{W^1(\rho,1)} \leq c' \left\{ |f_j|_o \left| N\ u_j \right|_{W^1(\rho,1)} + \right.$

$$\left. \left| \frac{T_1}{\rho+1}\ \beta\, u_j \right|_{W^1(\rho,1)} \left| N\ u_j \right|_{W^1(\rho,1)} + \varepsilon_j \left| \beta u_j \right|_1 \left| N\ u_j \right|_1 \right\}$$

Comme les expressions suivantes sont bornées :

$|f_j|_o$; $\left| \frac{T_1}{\rho+1}\ \beta\, u_j \right|_{W^1(\rho,1)}$ (lemme II.1),

$|\beta u_j|_1$ (Proposition II.1)

Nous obtenons que le premier membre de (II.25) reste borné quand j varie. En particulier nous avons :

(II.26) $\quad N\ u \in W^1(\rho,1)$

Le lemme résulte alors de (II.26), et du fait que :

$$y^\rho T_1\ \zeta\, u = N\ u + \left[T_1\ ,\beta \right]\ y^\rho \zeta\, u$$

C.Q.F.D.

Revenons, maintenant, à la démonstration du théorème (II.1). Il résulte du lemme précédent, que pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \cap \bar{\Omega})$, on a :

(II.27) $\qquad y^{2\rho} T_2 \zeta u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, $D_y\, y^{\rho} T_1 \zeta u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

Dans la carte locale $\mathcal{O}$ l'équation :

$$A(D)\, u = f$$

s'écrit :

(II.28) $\quad \alpha D_{y^2} u + L y^{2\rho} u + S y^{\rho} u + \beta D_y + D_y T y^{\rho} u = f$

où : L est un opérateur tangentiel d'ordre 2 .

S et T sont des opérateurs tangentiels d'ordre 1 .

α est une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ ne s'annulant pas dans $\mathcal{O}$.

On obtient, finalement, en utilisant (II.27) et (II.28) :

$$D_{y^2} \zeta u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$$

Ce qui, joint à (II.27) montre le théorème.

C.Q.F.D.

Donnons quelques applications de ce théorème.

Notons G_d (respectivement G_n) le sous espace de G formé par les v telles que :

$$\gamma v = o \quad \text{(respectivement} \quad \gamma \wedge v = o).$$

<u>Cas I.Problème de Dirichlet</u>

THEOREME.II.2. $A(D)$ est un isomorphisme entre G_d et $H^{\circ}(\Omega)$

En effet $A(D)$ envoie G_d dans $H^{\circ}(\Omega)$ (Remarque II.2). La surjectivité résulte du théorème (II.1).
L'injectivité est une conséquence de l'unicité de la solution de (II.2). Enfin, la continuité de l'application inverse résulte

du théorème de Banach.

REMARQUE.II.3. Il est possible d'obtenir, à partir de la démonstration du théorème (II.1), une évalutation de la constante C figurant dans l'inégalité donnant la continuité de l'inverse de A(D) :

$$|u|_{G_d} \leqslant C \ |A(D)\ u|_o$$

THEOREME.II.3. $(A(D), \gamma)$ est un isomorphisme entre G et $H^\circ(\Omega) \times H^{\frac{3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$

L'injectivité de l'application est immédiate.
Montrons sa surjectivité.

Soit $(g, \varphi) \in H^\circ(\Omega) \times H^{\frac{3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$. Désignons par $v \in G$ la solution (unique de :

$$\begin{cases} A(D)\ v = g - A(D)\ w \\ \gamma\ v = o \end{cases}$$

où $w \in G$ telle que $\gamma w = \varphi$ (Proposition II.3).
Si on pose $\tilde{v} = v + w$ on a bien :

$$\begin{cases} A(D)\ \tilde{v} = g \\ \gamma \tilde{v} = \varphi \end{cases}$$

C.Q.F.D.

Nous donnerons plus loin d'autres résultats concernant le problème de Dirichlet non homogène.

Cas.II. Problème de Neumann.

THEOREME.II.4. A(D) est un isomorphisme entre G_n et $H^\circ(\Omega)$.

DEMONSTRATION : $A(D)$ envoie continûment G_n dans $H^\circ(\Omega)$.

La solution u de (II.2) (cas II) est bien dans G lorsque f est dans $H^\circ(\Omega)$. Montrons qu'elle est dans G_n. (i.e. $\gamma \Lambda u = o$). Ce qui démontre la surjectivité désirée.

Si v et w sont dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, nous avons la formule de Green suivante :

(II.29) $$a(v,w) = (A(D)\, v,w) + (\alpha(x)\, \gamma \Lambda u\, ,\, \gamma w)_{H^\circ(\Gamma)}$$

où $\alpha(x)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ non nulle sur Γ [1]

La densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans G (proposition II.3) montre que la formule (II.29) est encore valable si v est dans G.

Comme :

$$a(u,w) = (f,w) \quad \text{et} \quad A(D)\, u = f$$

nous obtenons, alors, en remplaçant v par u dans (II.29) :

Pour tout $w \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ $\quad (\alpha(x)\, \gamma \Lambda u\, ,\, \gamma w)_{H^\circ(\Gamma)} = o$

---

[1] En effet, φ étant nulle sur Γ, nous avons :

$$b(\varphi^\rho v\, ,\, \varphi^\rho w) = (\varphi^\rho B(D) \varphi^\rho v\, ,\, w)$$

d'autre part :

$$(\Lambda v\, ,\, \Lambda w) = \int_\Omega \Lambda v(x) \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k(x)\, D_k w}\, dx$$

En appliquant la formule de Stokes ; nous obtenons :

$$(\Lambda v\, ,\, \Lambda w) = (\Lambda^* \Lambda v\, ,w) + \int_\Gamma (\sum_k \cos \theta_k \alpha_k(x)) \Lambda v\, \overline{w}\, d\sigma$$

$d\sigma$ désignant l'élément d'aire de Γ et $\cos \theta_k$ le $k^{\text{ième}}$ cosinus directeur de la normale sortante à Γ.

La transversalité de Λ montre que l'expression :

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \cos \theta_k\, \alpha_k(x)$$

ne s'annule pas sur Γ.

Et finalement :

$$\gamma \wedge u = o$$

Notons que l'injectivité de notre application résulte aussi de la formule de Green.

[En effet si $v \in G_n$ et vérifie $A(D)v = o$, la formule (II.29) montre que l'on a :

$$a(v,w) = o \quad \text{pour tout} \quad w \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

on a donc $v = o$].

Un raisonnement identique à celui utilisé dans la démonstration du théorème (II.3) nous donne :

THEOREME.II.5. $(A(D), \gamma \wedge)$ est un isomomorphisme entre G et $H^{\circ}(\Omega) \times H^{\frac{1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$.

IV. REGULARITE (SECOND MEMBRE DANS $H^k(\Omega)$)

k étant un entier $\geq o$, désignons par $G^k(\Omega) = G^k$ l'espace des distributions u définies dans Ω, et telles que:

(II.30) $\qquad D^{\alpha} u \in G \quad$ pour $\quad |\alpha| \leq k$

où G est toujours l'espace des u qui vérifient (II.15). On a $G^{\circ} = G$. On munit G^k de la norme :

$$|u|^2_{G^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} |D^{\alpha} u|^2_G$$

Il résulte des propriétés de G (proposition II.3) que l'on a :

PROPOSITION.II.4.

1°) Si $\Psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, l'application $u \longmapsto \Psi u$ est continue de G^k dans G^k pour tout k.

2°) Nous avons les inclusions :

$$H^{k+2}(\Omega) \subset G^k \subset H^{k+2}_{loc}(\Omega) \cap H^k(\Omega)$$

3°) Pour que u appartienne à G^k il faut et il suffit que u soit dans $H^{k+2}_{loc}(\Omega)$, et que, pour toute carte locale θ voisinage d'un point de Γ, et pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(\theta \cap \bar{\Omega})$ on ait :

$$D^{\alpha} \zeta u \in W^2(2\rho, 2) \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leq k$$

4°) Les applications $u \longmapsto \varphi^{\rho-1} u$ et $u \longmapsto \varphi^{\rho} \Lambda u$ sont continues de G^k dans $H^{k+1}(\Omega)$.

L'application $u \longmapsto A(D) u$ est continue de G^k dans $H^k(\Omega)$.

5°) Enfin G^k est aussi l'espace des u qui vérifient :

$$\varphi^{2\rho} u \in H^{k+2}(\Omega)$$
$$\Lambda^2 u \in H^k(\Omega)$$

La norme de G^k étant équivalente à :

$$\left(|\varphi^{2\rho} u|^2_{k+2} + |\Lambda^2 u|_k \right)^{1/2}$$

Voici maintenant le théorème de régularité :

THEOREME.II.6. Soient $f \in H^k(\Omega)$ (k entier ≥ 0) et u la solution de (II.2) dans l'un des cas (II.13) ou (II.14). Alors $u \in G^k$ défini en (II.30).

Il résulte de ce théorème et de l'inclusion de G^k dans $H^k(\Omega)$ (Proposition II.4 2°)) :

COROLLAIRE. Avec les notations du théorème (II.6), nous avons :

1°) Si $f \in H^k(\Omega)$, u est dans $H^k(\Omega)$.

2°) Si $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, u est aussi dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

DEMONSTRATION DU THEOREME (II.6)

Nous allons faire une récurrence sur k. Pour $k=o$, le théorème est démontré (théorème II.1). Nous le supposons donc prouvé jusqu'à $k-1$, et nous le démontrons pour k $(k \geq 1)$.

Soit f_j une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ telles que :

$$\lim_{H^k(\Omega)} f_j = f$$

u_j désigne, alors, la solution de (II.3).

Nous commençons par démontrer :

LEMME (II.3) Soient $\mathcal{O}$ une carte locale voisinage d'un point de Γ et $\beta, \zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \cap \bar{\Omega})$ vérifiant $\beta\zeta = \zeta$. Pour tout nombre réel s, il existe une constante C telle que pour tout j :

(II.31) $$\varepsilon_j \left| T_{s+\frac{1}{\rho+1}} \zeta u_j \right|_1^2 + \left| T_{s+\frac{1}{\rho+1}} \zeta u_j \right|^2_{W^1(\rho,1)} \leq$$

$$c \left\{ \varepsilon_j \left| T_s \beta u_j \right|_1^2 + \left| T_s \beta u_j \right|^2_{W^1(\rho,1)} + \left| T_s \beta f_j \right|_o^2 \right.$$

Preuve : Elle est semblable à celle du lemme (II.1).

Posons $M = \beta T_{s+\frac{1}{\rho+1}} \zeta$, et considérons les expressions :

$$A_j = a_j(M\, u_j \;,\; M\, u_j)$$

$$B_j = a_j(\, u_j \;, M^* M\, u_j)$$

Utilisons les lemmes (I.3) et (I.4) en prenant $v = \beta u_j$ et $r = s+\frac{1}{\rho+1}$. Nous obtenons :

$$\text{(II.32)} \quad |A_j - B_j| \leq C\Big\{ |T_s\, \beta\, u_j|_{W^1(\rho,1)} \; |M\, u_j|_{W^1(\rho,1)} \; + \; \varepsilon_j\, |T_s\, \beta\, u_j|_1 \; |M\, u_j|_1 \Big\}$$

La S-coercitivité de a nous donne :

$$\text{(II.33)} \quad \varepsilon_j\, |M\, u_j|_1^2 + C\, |M\, u_j|^2_{W^1(\rho,1)} \leq |A_j|$$

Enfin, nous avons :

$$|B_j| = |(f_j \;,\; M^* M\, u_j)| = |(M\, f_j \;,\; M\, u_j)| = |(T_{\frac{-1}{\rho+1}} M\, f_j \;, T_{\frac{1}{\rho+1}} M\, u_j)|$$

Comme $T_{\frac{-1}{\rho+1}} M$ est un opérateur tangentiel d'ordre s , et que l'on a l'inclusion $W^1(\rho,1) \subset W^1(o,\frac{1}{\rho+1})$.
nous obtenons :

$$\text{(II.34)} \quad |B_j| \leq C\, |T_s\, \beta\, f_j|_o \; |M\, u_j|_{W^1(\rho,1)}$$

Nous déduisons de II.32 - 33 et 34 , où les constantes sont indépendantes de j :

(II.35)

$$\varepsilon_j |M u_j|_1^2 + c\,|M u_j|^2_{W^1(\rho,1)} \leqslant C' \Big\{ |M u_j|_{W^1(\rho,1)} \big(|T_s \beta f_j|_o + |T_s \beta u_j|_{W^1(\rho,1)} \big)$$

$$+ \varepsilon_j \, |T_s \beta u_j|_1 \, |M u_j|_1 \Big\}$$

Soit encore, avec une constante C différente

(II.36) $\varepsilon_j \, |M u_j|_1^2 + |M u_j|^2_{W^1(\rho,1)} \leqslant$ Cx second membre de (II.31).

(II.31) résulte alors de (II.36) jointe à :

$$T_{s+\frac{1}{\rho+1}} \zeta u_j = M u_j + \Big[T_{s+\frac{1}{\rho+1}}, \beta \Big] \zeta u_j$$

C.Q.F.D.

LEMME.(II.4) Soient $f \in H^k(\Omega)$ et u la solution de (II.2). Pour toute carte locale θ, voisinage d'un point de Γ, et tout $\zeta \in \mathcal{D}(\theta \cap \bar{\Omega})$ on a :

$$T_{k+\frac{1}{\rho+1}} \zeta u \in W^1(\rho,1)$$

En particulier si $k \geq 1$ on a :

(II.37) $$T_1 \zeta u \in W^1(\rho,1)$$

<u>Preuve</u> : On applique (II.31) un nombre fini de fois, en prenant $s = \frac{\ell}{\rho+1}$ avec ℓ successivement égal à : $0,1,\ldots,k(\rho+1)$.

Comme $\varepsilon_j |u_j|_1^2 + |u_j|_S^2$ est bornée (prop.II.1), et que f_j converge vers f dans $H^k(\Omega)$, on en déduit que, pour tout $\zeta\in\mathcal{D}(\theta\cap\bar\Omega)$, l'expression :

$$\varepsilon_j \left| T_{k+\frac{1}{\rho+1}} \zeta u_j \right|_1^2 + \left| T_{k+\frac{1}{\rho+1}} \zeta u_j \right|_{W^1(\rho,1)}^2$$

reste bornée quand j varie.

Par un raisonnement, déjà utilisé, nous obtenons le résultat annoncé.

C.Q.F.D.

Revenons à la démonstration du théorème (II.6). Notons que $u\in H^{k+2}_{loc}(\Omega)$, en vertu d'un théorème classique (voir [7] [30]), puisque $A(D)$ est elliptique en tout point de Ω. Il suffit donc, de démontrer la régularité annoncé dans les cartes locales, voisinages des points de Γ.

Soient θ une telle carte locale, et $\zeta\in\mathcal{D}(\theta\cap\bar\Omega)$ avec $\zeta(x',y)=\varphi(x')\psi(y)$ où :

$$\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad , \psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \psi=1 \text{ au voisinage de } 0 \ .$$

En vertu du lemme (II.4) on a :

$$\text{(II.38)} \qquad D_{x'_i}\zeta u \in S \qquad\qquad i=1,\ldots,n-1 \ .$$

Soit $v\in\mathcal{D}(\Omega)$ dans le cas I (et $v\in\mathcal{D}(\bar\Omega)$ dans le cas II), considérons l'expression

$$a(D_{x'_i}\zeta u \ , v)$$

Par intégration par parties nous avons : [1]

$$a(D_{x'_i}\zeta u , v) = a(u , \zeta D'_{x_i} v) + (Lu , v)$$

avec

$$L = \alpha D_y^2 + y^{2\rho} M u + y^{\rho} ND_y + y^{\rho-1} P + Q + c$$

où α et c sont des fonctions $\mathcal{C}^{\infty}$,

M est opérateur tangentiel d'ordre 2 .

N et P sont des opérateurs tangentiels d'ordre 1

Q est un opérateur d'ordre 2 à support compact dans $\mathbb{R}^n_+$.

Soit encore :

$$a(D_{x'_i}\zeta u, v) = (f, \zeta D_{x'_i} v) + (Lu , v)$$

$$= (D_{x'_i} \zeta f + Lu, v)$$

$D_{x'_i}\zeta u$ est donc solution de (II.2) avec f remplacé par $g = D_{x'_i} \zeta f + Lu$.

Le théorème étant supposé démontré pour $k-1$, nous avons :

$$u \in G^{k-1}$$

Il résulte, alors, des propriétés des G^k (proposition II.4) que Lu est dans $H^{k-1}(\Omega)$, il en est donc de même pour g Une nouvelle application de l'hypothèse de récurrence montre, alors, que :

---

(1) L'intégration par parties est permise puisque $u \in G$ (th.II.1), et que l'on a (II.38) ; toutes les expressions écrites ont un sens.

Nous n'obtenons pas d'intégrales de surface puisque, dans le cas I , $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, et est donc nulle au bord, et dans le cas II $D_y\zeta$ est à support compact dans $\mathbb{R}^n_+$ et $D_y u$ a une trace nulle sur $y=o$ (th.(II.4))

(II.39) $$D_{x'_i} \zeta\, u \in G^{k-1}$$

Il est maintenant, facile de voir qu'il ne reste plus qu'à montrer que :

$$D_y^3 \zeta\, u \in H^{k-1}(\Omega)$$

ce qui s'obtient en dérivant l'équation $A(D)u = f$, par rapport à y dans la carte θ, et en utilisant (II.39).

C.Q.F.D.

<u>Remarque sur le chapitre II.</u>

REMARQUE.II.4.

Considérons la forme intégro-différentielle suivante :

(II.40) $$a(u,v) = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Omega} a_{\alpha,\beta}(x)\, P_\alpha u(x)\, \overline{P_\beta v(x)}\, dx$$

les $a_{\alpha,\beta}$ étant des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $\overline{\Omega}$, et les P_α pouvant prendre les valeurs :

$$D_{x_i} \varphi^\rho \quad (i=1,\dots,n) \ ; \ \Lambda \ ; \ \text{identité.}$$

(La fonction φ et l'opérateur Λ étant ceux définis au paragraphe II de ce chapitre). a est, alors, bilinéaire continue sur S.

Faisons l'hypothèse :

(II.41) a est <u>S-coercitive</u>

Ce cas est plus général que celui étudié dans ce chapitre (a étant définie par (II.11)), puisque, dans le second membre de (II.40) nous pouvons avoir des termes de la forme $(c(x)\,\Lambda u\ ,\ D_{x_i} \varphi^\rho v)$ qui ne figurent pas dans (II.11).

Il est facile de voir que les résultats de régularité donnés par les théorèmes II.1 et II.6 restent encore valables dans ce cadre plus général.

REMARQUE.II.5.

Le fait que ρ soit entier n'est intervenu que pour avoir des coefficients $\mathscr{C}^{\infty}$ dans les équations approchées. En supposant seulement ρ réel $> \frac{1}{2}$, on peut voir que certains résultats de régularité restent encore valables. Les solutions approchées ne sont plus $\mathscr{C}^{\infty}$, mais, sont suffisemment régulières pour pouvoir leur appliquer des dérivations fractionnaires parallèles au bord, et garder un sens à des expressions telles que celles figurant dans II.18 par exemple.

REMARQUE.II.6.

Dans le demi-plan $\mathbb{R}^n_+ = \{(x',y) \ , \ y > o\}$,on peut étudier des problèmes analogues à ceux traités dans ce chapitre, en prenant $\Lambda = D_y$. On peut, alors, en faisant des hypothèses de régularité dissymétriques en la variable normale et les variables tangentielles sur le second membre, obtenir des résultats de régularité de même nature sur la solution (en distinguant les variables normales et tangentielles) (voir [22] ,[3] dans le cas des opérateurs elliptiques).

CHAPITRE III

DEGENERESCENCE A L'INTERIEUR
PROBLEMES NON HOMOGENES

I. OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERANT A L'INTERIEUR.

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de bord Σ . Nous supposons que Σ est une variété $\mathscr{C}^\infty$ de dimension n-1.

Ω étant l'ouvert considéré dans le chapitre II , nous faisons l'hypothèse :

$$\overline{\Omega} \subset U$$

Nous supposons que la forme b (II.11) est définie, et est elliptique dans U . Nous posons :

$$a(u,v) = (\Lambda u , \Lambda v) + b(\varphi^\rho u , \varphi^\rho v)$$

pour $u,v \in \mathcal{D}(U)$, φ vérifiant toujours (II.7), le produit scalaire (,) étant celui de $L^2(U)$.

Nous notons $S(U)$ l'espace des distributions u définies dans U et vérifiant :

$$\varphi^\rho u \in H^1(U)$$
$$\Lambda u \in H^\circ(U)$$

$\overset{\circ}{S}(U)$ désigne l'adhérence de $\mathcal{D}(U)$ dans $S(U)$. Nous notons, de même, $G^k(U)$ (k entier $\geqslant 0$) , l'espace des u telles que :

$$\varphi^{2\rho} u \in H^{k+2}(U)$$
$$\Lambda^2 u \in H^k(U)$$

Il est facile d'adapter les propositions (II.2) et (II.3) pour avoir les propriétés de ces espaces; (en utilisant, en particulier, la remarque (I.4)).

Nous avons :

THEOREME. III.1. Pour tout $f \in H^{\circ}(U)$ il existe u unique dans $\overset{\circ}{S}(U)$ tel que :

$$A(D)u = f$$

De plus, si $f \in H^{k}(U)$ (k entier $\geq o$) on a

$$u \in G^{k}(U)$$

L'existence et l'unicité sont immédiate par la méthode variationnelle.

Nous voyons sans peine que les démonstrations des théorèmes (II.1) et (II.6) s'adaptent à ce cas. [Au voisinage des points de Γ on se ramène par carte locale à $\mathbb{R}^{n}_{(x',y)}$ au lieu de $\mathbb{R}^{n}_{+}$].

Nous allons en déduire, maintenant, le théorème de régularité suivant :

THEOREME.III.2. Soit W un ouvert contenu dans U.

Si $u \in \mathscr{D}'(W)$, $f \in H^{k}_{loc}(W)$ (k entier $\geq o$) et vérifient : $A(D)\, u = f$

On a : $u \in G^{k}_{loc}(W)$

COROLLAIRE. $A(D)$ est hypoelliptique dans U.

Le corollaire est une conséquence du théorème puisque nous avons l'inclusion :

$$G^{k}_{loc}(W) \subset H^{k}_{loc}(W)$$

qui résulte facilement de la proposition (II.4) 2°) .

Notons que cette hypoellipticité ne résulte pas des conditions suffisantes données dans [11] [27] [34].

DEMONSTRATION DU THEOREME III.2.

Notons que $A(D)$ est elliptique dans $U - \Gamma$; le théorème est donc bien connu si $W \cap \Gamma = \phi$ (régularité à l'intérieur des opérateurs elliptiques).

Nous supposons dans la suite que :

$$W \cap \Gamma \neq \phi$$

La démonstration va se faire en deux étapes.

1°) Nous démontrons d'abord le théorème avec l'hypothèse supplémentaire : $u \in S_{loc}(W)$.

Soit $\theta \subset W$ une carte locale voisinage d'un point de Γ. Avec les coordonnées de θ , on a :

(III.1)

$$A(D) = \alpha D_y^2 + y^{2\rho} L + y^{\rho} M D_y + y^{\rho - 1} N + \gamma D_y + \delta$$

où α , γ et δ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans θ

L est un opérateur tangentiel d'ordre 2 .

M et N sont des opérateurs tangentiels d'ordre 1 .

Soient ζ et β deux fonctions de $\mathcal{D}(\theta)$.

Nous supposons que $\zeta(x',y) = \varphi(x')\psi(y)$ avec

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\psi = 1$ dans un voisinage de 0 , et $\beta\zeta = \zeta$.

De l'équation $A(D)\, u = f$ et de (III.1) on tire :

(III.2)

$$A(D)\zeta u = \zeta f + y^{2\rho} P \beta u + y^{\rho} \mu D_y \beta u + y^{\rho - 1} \nu \beta u + Q \beta u$$

où P et Q sont des opérateurs d'ordre 1 , Q étant à support compact dans $\mathcal{O} - \Gamma$ (puisqu'il en est de même pour $D_y \zeta$) : μ et ν étant des fonctions $\mathcal{E}^{\infty}$ dans $\mathcal{O}$.

Nous démontrons le théorème par récurrence sur k .

i) <u>$k = o$</u> βu étant dans $\overset{\circ}{S}(U)$, le second membre de (III.2) est dans $H^{\circ}(U)$, le théorème (III.1) montre alors que $\zeta u \in G^{\circ}(U)$ et on a bien : $u \in G^{\circ}_{loc}(W)$.

ii) <u>$k > o$</u> Supposons le théorème démontré pour $k-1$.
On a alors : $\beta u \in G^{k-1}(U)$

Les propriétés des G^k (proposition II.4) montrent que le second membre de (III.2) est dans $H^k(U)$, et le théorème (III.1) nous donne :

$$\zeta u \in G^k(U)$$

2°) Nous ne faisons plus, maintenant, d'hypothèse supplémentaire.

Soit $\mathcal{O}$ une carte locale d'un point de $\Gamma \cap W$ relativement compacte dans W . La restriction de u à $\mathcal{O}$ est une distribution d'ordre fini [33] et appartient donc à $H^{-s}(\mathcal{O})$ pour un entier s positif ≥ 1 .

Nous allons utiliser une idée déjà employée dans [27],[30].

Δ^s étant un isomorphisme entre $\overset{\circ}{H}{}^s(\mathcal{O})$ et $H^{-s}(\mathcal{O})$, soit $h \in \overset{\circ}{H}{}^s(\mathcal{O})$ tel que :

$$\Delta^s h = u|_{\mathcal{O}}$$

Dans la carte $\mathcal{O}$ nous avons :

(III.3) $\qquad \Delta^s \ A(D)h = f|_{\mathcal{O}} + [\Delta^s \ , A(D)]h$

Nous allons utiliser la régularité de l'opérateur elliptique Δ^s. L'opérateur $[\Delta^s, A(D)]$ est d'ordre $2s+1$; le second membre de (II.3) est donc dans $H^{-s-1}(\mathcal{O})$. Nous obtenons :

$$A(D)h \in H^{s-1}_{loc}(\mathcal{O})$$

Nous sommes, donc, dans le cas d'application de la partie 1°), et nous avons :

(III.4) $\qquad h \in G^{s-1}_{loc}(\mathcal{O})$

Admettons pour l'instant le lemme suivant :

LEMME.III.1. L'application $g \mapsto [\Delta^s, A(D)]g$ est continue de $G^{r-1}_{loc}(\mathcal{O})$ dans $H^{-2s+r}_{loc}(\mathcal{O})$ pour tout entier $r \geq 1$.

En utilisant (III.4), et le lemme avec $r=s$, nous obtenons que le second membre de (III.3) est dans $H^{-s}(\mathcal{O})$, ce qui, joint à la régularité de Δ^s, nous donne :

$$A(D)h \in H^{s}_{loc}(\mathcal{O})$$

soit encore, en utilisant la partie 1°) :

$$h \in G^{s}_{loc}(\mathcal{O})$$

On applique, alors, de nouveau, le lemme (III.1), la régularité de Δ^s et le résultat de la partie 1°). De proche en proche, on arrive à prendre, dans le lemme (III.1), $r=2s$; finalement nous avons :

$$h \in G^{2s}_{loc}(\mathcal{O})$$

où encore : $u|_\theta = \Delta^s h \in G^\circ_{loc}(\theta)$

Comme $G^\circ_{loc}(\theta) \subset S_{loc}(\theta)$ (Remarque (II.2)α), nous sommes ramenés à la première partie.

Il ne nous reste plus qu'à prouver le lemme (III.1). Il suffit, pour cela, de montrer que le commutateur de Δ^s avec chaque terme figurant dans le second membre de (III.1) applique $G^{r-1}_{loc}(\theta)$ dans $H^{-2s+r}_{loc}(\theta)$. Vérifions le pour les deux premiers par exemple.

Nous avons :

$$\text{(III.5)} \qquad [\alpha D_y^2 \ , \ \Delta^s] g = [\alpha, \ \Delta^s] \ D_y^2 \ g$$

$[\alpha, \Delta^s]$ est d'ordre $2s-1$ et $D_y^2 \, g \in H^{r-1}_{loc}(\theta)$;

Le second membre de (III.5) est donc dans $H^{-2s+r}_{loc}(\theta)$.

De même il est facile de voir que :

$$\text{(III.6)} \quad [y^{2\rho} L \ , \ \Delta^s] g = [L, \Delta^s] \, y^{2\rho} g + M_1 \, y^{2\rho-1} \, D_y \, g + M_2 \, y^{2\rho-2} \, g + M_3 \, g$$

Les M_i $(i=1,2,3)$ étant des opérateurs différentiels avec :

$$\text{(III.7)} \quad \begin{cases} \text{ordre } M_1 = \text{ordre } M_2 = 2s \\ \text{ordre } M_3 = 2s-1 \end{cases}$$

Comme $g \in G^{r-1}_{loc}(\theta)$, nous avons d'après les propriétés des G^k :

$y^{2\rho} g \in H^{r+1}_{loc}(\theta)$; $y^\rho D_y g \in H^r_{loc}(\theta)$; $y^{\rho-1} g \in H^r_{loc}(\theta)$

Nous en déduisons, en utilisant (III.7) et le fait que $[L \ , \ \Delta^s]$ est d'ordre $2s + 1$, que le second membre de

(III.6) est bien dans $H^{-2s+r}_{loc}(\mathcal{O})$.

C.Q.F.D.

REMARQUE.III.1.

Les théorèmes (III.1) et (III.2) sont encore valables avec les hypothèses de la remarque (II.4).

II. PROBLEMES AUX LIMITES NON HOMOGENES.

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser les résultats de régularité établis dans le chapitre II et le paragraphe 1 de ce chapitre, pour étudier certains problèmes aux limites non homogènes, relatifs à des opérateurs elliptiques dégénérant au bord. Notre méthode est semblable à celle utilisée dans [23] pour les problèmes elliptiques (transposition, problèmes de Visik-Sobolev [35]).

Les notations étant celles du paragraphe précédent, désignons par $H(A)$ l'espace des u appartenant à $H^{\circ}(\Omega)$ telles que $A(D)u \in H^{\circ}(\Omega)$.

Nous le munissons du produit scalaire :

$$(u,v)_{H(A)} = (u,v) + (A(D)u\ ,\ A(D)v)$$

qui en fait un espace de Hilbert.

Nous avons le théorème de trace :

THEOREME.III.3

1°) $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H(A)$.

2°) L'application $u \longmapsto (\gamma u\ ,\ \gamma\Lambda u)$ définie dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ à valeur dans $(\mathcal{D}(\Gamma))^2$,se prolonge en une application linéaire continue de $H(A)$ dans

$$H^{\frac{-1}{2(\rho+1)}}(\Gamma) \times H^{\frac{-3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)\ .$$

DEMONSTRATION :

1°) Soit M une forme antilinéaire et continue sur $H(A)$. Elle s'écrit :

(III.8) $\quad M(u) = (f,u) + (g, A(D)u)$

f et g étant deux fonctions de $H^\circ(\Omega)$.

Supposons que $M(\varphi) = o$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Notons ϕ un élément de $\mathcal{D}(U)$ tel que :

$$\phi|_\Omega = \varphi$$

et $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les prolongées par 0, en dehors de Ω, de f, g.

Nous avons donc :

(III.9)

$$M(\varphi) = (\tilde{f}, \phi) + (\tilde{g}, A(D)\phi) = (\tilde{f} + A(D)\tilde{g}, \phi) = o$$

le produit (,) étant ici celui de $H^\circ(U)$.

Comme (III.9) a lieu pour tout $\phi \in \mathcal{D}(U)$ nous obtenons au sens de $\mathcal{D}'(U)$:

(III.10) $\quad A(D)\tilde{g} = -\tilde{f}$

En utilisant le théorème (III.2), on voit sans peine que $\tilde{g} \in G^\circ_{loc}(U)$. En particulier on a :

$$g \in G^\circ(\Omega) \quad \text{et} \quad \gamma g = \gamma \wedge g = o$$

Ce qui montre qu'une intégration par parties dans (III.8) est permise [1], et que nous n'avons pas d'intégrale de surface ; nous obtenons :

---

[1] Pour le voir, on peut approcher g par une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $G^\circ(\Omega)$.

Pour tout $u \in H(A)$, $M(u) = (f + A(D)g\ ,\ u)$.

Comme $f + A(D)g = o$ (III.10) , on a bien $M \equiv o$.

Ceci démonstre la densité voulue.

2°) Soit $\varphi = (\varphi_o\ ,\ \varphi_1) \in H^{\frac{3}{2(\rho+1)}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$.

Le relèvement de la proposition (II.3) 3°) nous permet de trouver $w \in G(\Omega)$ tel que :

$$\text{(II.11)} \quad \begin{cases} \gamma w = \varphi_o \\ \gamma \Lambda w = \varphi_1 \end{cases}$$

w dépendant continûment de $(\varphi_o\ ,\ \varphi_1)$.

Si $u \in H(A)$, posons :

$$S(\varphi\ ,\ u) = (A(D)u\ ,\ w) - (u,\ A^*(D)\ w)$$

Comme $A^*(D)$ envoie continûment $G(\Omega)$ dans $H^o(\Omega)$ (Remarque (II.2)) nous avons :

$$|S(\varphi,u)| \leq c \quad |u|_{H(A)} \quad . \quad |\varphi|_{H^{\frac{3}{2(\rho+1)}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)}$$

ce qui montre que $S(\varphi\ ,u)$ est bilinéaire continue en φ ; elle s'écrit donc :

$$S(\varphi\ ,u) = \langle s_o u\ ,\ \varphi_o \rangle + \langle s_1 u\ ,\ \varphi_1 \rangle$$

avec $s_o \in \mathcal{L}(H(A)\ ,\ H^{\frac{-3}{2(\rho+1)}}(\Gamma))$

$s_1 \in \mathcal{L}(H(A)\ ,\ H^{\frac{-1}{2(\rho+1)}}(\Gamma))$

les produits $\langle\ ,\ \rangle$ étant respectivement ceux de la dualité entre $H^{\frac{-3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$

$$H^{\frac{-1}{2(\rho+1)}}(\Gamma) \quad \text{et} \quad H^{\frac{1}{2(\rho+1)}}(\Gamma) \quad (^1) \ .$$

D'autre part, si $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, on voit en écrivant la formule de Green, (voir la démonstration du th.(II.4)) que l'on a :

$$s_o u = \alpha \gamma \Lambda u$$

$$s_1 u = \beta \gamma u$$

α et β étant des fonctions appartenant à $\mathcal{D}(\Gamma)$ et ne s'annulant en aucun point de Γ.

Nous obtenons donc le résultat annoncé par densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $H(A)$.

C.Q.F.D.

Voici une conséquence de ce théorème.
Désignons par $F(A)$ les u appartenant à $H^{\circ}(\Omega)$ telles que $A(D)u$ appartient à $\mathring{S}'(\Omega)$.

THEOREME.III.4.

> $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $F(A)$ et l'application $u \longmapsto \gamma u$ définie dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ se prolonge en une application linéaire et continue de $F(A)$ dans $H^{\frac{-1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$.

DEMONSTRATION : Désignons par $Z(A)$ les u appartenant à

---

(1) Notons que $S(\varphi, u)$ ne dépend pas du relèvement choisi pour φ. Soient en effet w_1 et w_2 deux fonctions de $G(\Omega)$ vérifiant (III.11), il est facile de voir que l'on a:

$$(A(D)u \ , \ w_1 - w_2) = (u, \overset{*}{A}(D)\ (w_1 - w_2))$$

$H(A)$ et vérifiant :

$$A(D)u = o$$

Nous avons alors :

$$F(A) = \overset{\circ}{S} \oplus Z(A)$$

En effet, soit $f \in F(A)$ et $u \in \overset{\circ}{S}$ tel que

$$A(D)u = A(D)f$$

Nous avons : $f = (f - u) + u$ avec

$$f - u \in Z(A) \quad \text{et} \quad u \in \overset{\circ}{S}$$

Le théorème résulte alors de la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\overset{\circ}{S}$ et du théorème (III.3).

C.Q.F.D.

Nous allons utiliser ces théorèmes de trace, et la régularité déjà démontrée, pour obtenir :

THEOREME.III.5. (Problème de Dirichlet)

$(A(D), \gamma)$ est un isomorphisme entre :

1°) $F(A)$ et $\overset{\circ}{S}' \times H^{\frac{-1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$

2°) $H(A)$ et $H^{\circ}(\Omega) \times H^{\frac{-1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$

DEMONSTRATION :

En transposant l'isomorphisme donné par le théorème (II.2) nous obtenons, en remplaçant $A(D)$ par $A^*(D)$:

Pour tout L appartenant à G'_d, il existe u unique dans $H^{\circ}(\Omega)$ vérifiant :

(III.12) $$L(v) = (u, A^*(D)v)$$

pour tout $v \in G_d$

1°) Le théorème (III.4) montre que $(A(D), \gamma)$ envoie continument $F(A)$ dans $\overset{\circ}{S}{}' \times H^{\frac{-1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$. Montrons maintenant que cette application est surjective. Soient $f \in \overset{\circ}{S}{}'$ et $g \in H^{\frac{-1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$.

Nous allons prendre pour L :

(III.13) $\quad L(v) = \langle f, v \rangle + \langle \alpha g, \gamma \Lambda v \rangle$

le premier crochet étant celui de la dualité entre $\overset{\circ}{S}$ et $\overset{\circ}{S}{}'$, le second celui de $H^{\frac{-1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{-1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$.

Ceci a un sens puisque l'on a : (Prop.II.3)

$$G_d \subset \overset{\circ}{S}$$

$v \longmapsto \gamma \Lambda v$ est linéaire continue de G dans $H^{\frac{1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$

Nous tirons de (III.12) et (III.13) en prenant $v \in \mathcal{D}(\Omega)$:

(III.14) $\quad A(D)u = f$

Nous avons, d'autre part, la formule de Green :

(III.15) $\quad (u, A^*(D)v) - \langle A(D)u, v \rangle = \langle \alpha \gamma u, \gamma \Lambda v \rangle$

pour tout $u \in F(A)$ et tout $v \in G_d$.

Finalement nous avons à partir de III.12 - 13 - 14 et 15 :

$$\gamma u = g$$

2°) Nous suivons les mêmes idées que précédemment. Nous prenons $f \in H^\circ(\Omega)$ dans (III.13).

C.Q.F.D.

THEOREME.III.6. (Problème de Neumann)

$(A(D), \gamma \Lambda)$ est un isomorphisme entre $H(A)$ et $H^\circ(\Omega) \times H^{\frac{-3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$.

DEMONSTRATION :

L'application $(A(D), \gamma\Lambda)$ est continue de $H(A)$ dans $H^{\circ}(\Omega) \times H^{\frac{-3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$ (théorème III.3) .

Pour montrer qu'elle est surjective, nous transposons l'isomorphisme du théorème (II.4).

Nous avons :

Pour tout $L \in G'_n$ il existe u unique dans $H^{\circ}(\Omega)$ vérifiant :

(III.16) $\quad L(v) = (u, A^*(D)\, v)$

pour tout $v \in G_n$.

Soient $f \in H^{\circ}(\Omega)$ et $g \in H^{\frac{-3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$. Nous prenons :

(III.17) $\quad L(v) = (f,v) + < \alpha g\, ,\, \gamma v >$

le crochet représentant la dualité entre $H^{\frac{3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{-3}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$.

En prenant $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous obtenons à partir de (III.16) : $A(D)u = f$.

Enfin l'utilisation d'une formule de Green analogue à (III.15) nous donne finalement

$$\gamma \Lambda u = g$$

C.Q.F.D.

REMARQUE.III.2. Le théorème (III.5) précise le théorème (III.4) en montrant que l'application $u \longmapsto \gamma u$ de $F(A)$ dans $H^{\frac{-1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$ est surjective. La même remarque est valable pour le théorème (III.3) .

REMARQUE.III.3.

La solution u donnée par le théorème III.5 est dans $H^1_{loc}(\Omega)$; elle admet donc une trace dans $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, où Γ_ε est la variété définie par $\varphi(x) = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ petit). Par un isomorphisme entre Γ et Γ_ε, on peut "transporter" cette trace de Γ_ε à Γ. On peut montrer, alors, qu'elle tend vers celle de u dans $H^{-\frac{1}{2(\rho+1)}}(\Gamma)$, quand ε tend vers 0. La démonstration est semblable à celle utilisée dans [23].

La même remarque est valable pour le théorème III.6.

REMARQUE.III.4.

Il serait intéressant d'"interpoler" entre les isomorphismes donnés par les théorèmes (II.3) et (III.5) (respectivement (II.5) et (III.6)) et de résoudre, ainsi, d'autres problèmes non homogènes.

-:::-:::-:::-:::-

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUBIN J.P. Un théorème de compacité. C.R. Acad. Sci., Paris. 256, 5042-5044 (1963).

[2] BAOUENDI M.S. Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérant au bord. C.R. Acad. Sci., Paris 262, 337-340 (1966).

[3] BARROS NETO J. Inhomogeneous boundary value problems in a half space.
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 19, 331-365, (1965).

[4] BOURBAKI N. Espaces vectoriels topologiques.
Actualités Sci. Ind. N°1229 Paris. Hermann 1955.

[5] CALDERON A.P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math. 24 113-190 (1964).

[6] DIXMIER J. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien Paris, Gauthier Villars, 1957.

[7] FRIEDRICHS K.O. On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations.
Comm. Pure. Appl. Math. 6, 299-326 (1953).

[8] GEYMONAT G. GRISVARD P. Problemi ai limiti ellittici negli spazi di Sobolev con Peso.
Libraria Universitaria Pavese 1965.

[9] GRISVARD P. Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17, 255-296 (1963).

[10] GRISVARD P. Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications. J. Math. Pures et Appl.
45, 143-206, (1966) et suite à paraître.

[11] HÖRMANDER L. Hypoelliptic differential operators
Ann. Inst. Fourier 11, 477-492 (1961).

[12] KIPRIJANOV I.A. Equation de Beltrami.
Communication I.C.M. Moscou (1966).

[13] KOHN J.J. et NIRENBERG L. An algebra of pseudo-differential operators - Comm. Pure. Appl. Math. 18, 269-305 (1965).

[14] KOHN J.J. et NIRENBERG L. Non coercive boundary Value problems - Comm. Pure Appl. Math. 18 443-492 (1965).

[15] LIONS J.L. Equations différentielles opérationnelles
Cours C.I.M.E. Varenna (1963).

[16] LIONS J.L. Sur un nouveau type de problème non linéaire.
Sém. Equa. Déri. part. J.LERAY
Collège de France . Paris (1965-1966).

[17] LIONS J.L. Equations différentielles opérationnelles.
Springer - Verlag (1961).

[18] LIONS J.L. Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications. Bull. Math. R.P.R. Bucarest, 2 , 419-432 (1958).

[19] LIONS J.L. Théorèmes de traces et d'interpolation (I).
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13, 389-403 (1959).

[20] LIONS J.L. Dérivées intermédiaires et espaces intermédiaires.
C.R. Acad. Sci. Paris 256 4343-4345 (1963).

[21] LIONS J.L. Une construction d'espaces d'interpolation
C.R. Acad. Sci. Paris 250 1853-1855 (1960).

[22] LIONS J.L. et MAGENES E. Problemi ai limiti non omogenei (I).
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 14 269-308 (1960).

[23] LIONS J.L. et MAGENES E. Problèmes aux limites non homogènes (II). Ann. Inst. Fourier 11, 137-178 (1961).

[24] LIONS J.L. et PEETRE J. Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publ. Math. Inst. Hautes études Sci. 19 5-68 (1964).

[25] LIZORKIN P.I. The dirichlet principle for the Beltrami equation in a semi-space. Doklady Akad. Nauk 134 761-764 (1960).

[26] LIZORKIN P.I. et NIKOLSKY on some inéqualities for weigt-class fonctions and boundary value problems with à strong degeneracy at the boundary. Doklady Akad. Nauk SSSR 159 512-515 (1964).

[27] MALGRANGE B. Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques. Bull. Soc. Math. France 85, 283-306 (1957).

[28] MOREL H. Introduction de poids dans l'étude de problèmes aux limites. Ann. Inst. Fourier 12, 299-414 (1962).

[29] NEČAS J. On the regularity of solution of second ordre elliptic partial differential equation with an unbounded integral
Arch. Rat. Mech. An. 9 134-144 (1962).

[30] NIRENBERG L. Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. Pure. Appl. Math. 8 648-674 (1955).

[31] OLEINIK O.A. A problem of fichera - Doklady Akad. Nauk SSSR, 157 1297-1301 (1964).

[32] SCHWARTZ L. Ecuaciones diferenciales parciales elipticas Bogota. Universidad National de Columbia (1956).

[33] SCHWARTZ L. Théorie des distributions Paris Hermann 1950-1951 .

[34] TREVES F. Opérateurs différentiels hypoelliptiques Ann. Inst. Fourier 9, 1-73 (1959).

[35] VISIK I.M. et SOBOLEV S.L. Nouvelle formulation générale des problèmes aux limites.
Doklady Akad. Nauk 111, 521-523 (1956).