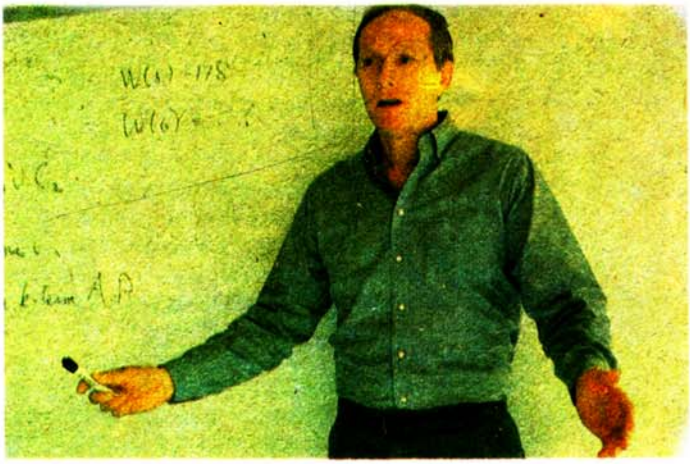


Рональд Грэхем, действительный член Национальной академии наук США, является одним из крупнейших в мире специалистов по комбинаторике, идеи и методы которой используются во всех без исключения областях математики и точного естествознания. Находясь в Москве, профессор Грэхем согласился дать интервью для «Кванта».

ИНТЕРВЬЮ С ПРОФЕССОРОМ РОНАЛЬДОМ ГРЭХЕМОМ

— Профессор Грэхем, когда и каким образом вы впервые заинтересовались математикой? Что повлияло на ваш выбор: семья, учителя, книги, соревнования?

— Сильный интерес к математике я впервые почувствовал в начальной школе, в третьем или четвертом классе. Особенно хорошо помню, как, познакомившись с алгоритмом извлечения квадратных корней — вы знаете этот старый итерационный алгоритм,— я заинтересовался, возможно ли сделать то же самое для кубических корней и для более высоких степеней. И я нашел аналогичный способ решения. Меня поддержал учитель, хорошо относившийся к моим увлечениям.

Позднее, когда я учился в младших классах средней школы, мне помогали два других учителя. Видя, что я могу решить любую задачу по алгебре, учитель мне как-то сказал: «Вот задача, которую ты решить не сможешь». В задаче речь шла о скорости роста популяции мышей, зависящей от их численности, т. е. мне пришлось бы иметь дело с дифференциальным уравнением. Что же, учитель оказался прав — задачу решить я не смог. Тогда он дал мне учебник анализа и сказал: «Если хочешь узнать решение — прочти эту книгу». Я так и сделал. Тогда математика меня и захватила.

До этого я увлекался звездами, собирался стать астрономом. Только позднее я узнал, что наблюдение за звездами — это еще далеко не вся астрономия. Но эта наука интересует меня по-прежнему. Кроме диплома математика у меня есть еще один — по физике.

Дома мне мало чем могли помочь. Дело в том, что в нашей семье я первым закончил колледж.

— Как вы стали математиком-исследователем?

— Насколько я помню, в средней школе и на младших курсах университета такой цели я для себя не ставил — мне просто было интересно заниматься математикой. Потом, в 1950 году, я начал подготовку по специальной программе, дававшей право поступления в университет еще до окончания средней школы. Чтобы заниматься по этой программе, необходимо сдать определенные тестовые экзамены. По математике я оказался лучшим в Соединенных Штатах. В 15 лет я поступил в Чикагский университет, в котором знаменитый просветитель Р. М. Хатчинс ввел тогда систему гуманитарного образования «Книги классиков». Суть ее заключалась в том, что студенты читали не о Ньютоне, а самого Ньютона (или Дарвина) в оригинале. В начале обучения проводилось тестирование, выявлявшее, что студент знает, а что — нет. Как оказалось, я хорошо знал математику, физику, химию, но гораздо хуже — психологию, общественные науки, французский. В принципе, изучение гуманитарных дисциплин было полезным, хотя и не отвечало моим научным интересам.

Проучившись три года в Чикаго, я поступил в Калифорнийский университет, где занялся электротехническим машиностроением. Я проучился еще год, но диплома у меня по-прежнему не было. Если после четырех лет обучения в колледже студент не имел диплома, тогда его могли призвать в армию. Чтобы этого не случилось со мной, я в 1955 году пошел добровольцем в ВВС. Три года я служил на Аляске. Заняться там было особенно нечем, и я поступил в колледж, закончил его и получил диплом физика. Хотя я прослушал много курсов по математике, диплом математика я не получил: этот колледж не имел права давать диплом по математике.

После демобилизации я вернулся в Калифорнийский университет (в Беркли) и проучился там еще три года в аспирантуре. Работу на звание доктора философии я написал под руководством профессора Д. Г. Лехмера, еще когда учился в Беркли, до военной службы. Позднее Лехмер стал моим научным руководителем. Таким образом, я, как говорится, вышел на широкую дорогу, и тогда же (в 1961 году) я поступил в знаменитые лаборатории фирмы Белл, где с тех пор и работаю.

За это время я несколько раз был приглашенным профессором математики или информатики в Стандорфе, в Калифорнийском технологическом институте, в Калифорнийском университете и в Принстоне. Я принимаю такие приглашения потому, что занятия со способными студентами всегда дают хороший импульс в работе.

— Профессор Грехем, вы — серьезный математик, но, кроме того, вы еще и... виртуозный жонглер. Расскажите об этом.

— Я заинтересовался жонглированием сразу после поступления в университет. Сейчас у меня высокий рост и атлетическое телосложение, тогда я был младше своих сокурсников и ниже их ростом. Поэтому мне трудно было наравне со всеми заниматься наиболее популярными в США видами спорта — баскетболом и американским футболом. В Чикагском университете я стал заниматься гимнастикой, и притом не совсем обычной. Это была смесь гимнастики, танца, жонглирования и упражнений на одноколесном велосипеде. Тогда я и открыл для себя жонглирование. Кроме того, я занялся прыжками на батуте. По существу, это тоже одна из форм жонглирования, в которой «предметом» является сам человек.

— Имеет ли жонглирование какое-нибудь отношение к вашей любви к математике?

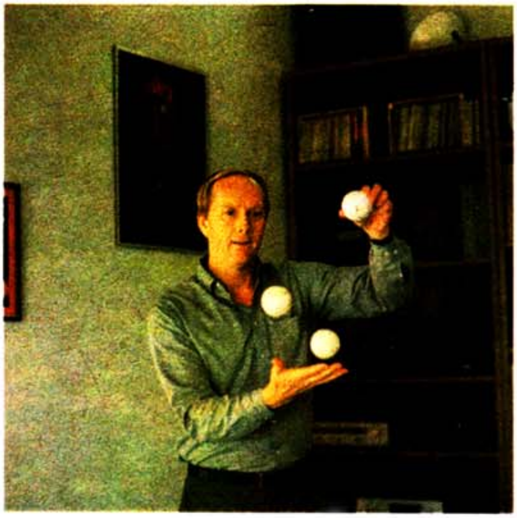
— Взаимосвязь между математикой и жонглированием гораздо сильнее, чем это может показаться. Из трех тысяч членов международной ассоциации жонглеров довольно значительная часть занимается вычислительной наукой. На мой взгляд, общность математики и жонглирования хорошо подмечена в следующем высказывании: «Главная трудность жонглирования в том, что шар летит только туда, куда его бросают». Т. е. все зависит от человека. В составлении программ ситуация точно такая же: человек пишет программу, а компьютер делает то, что ему приказано. Здесь встает вопрос управления: жонглирование очень алгоритмично, в нем есть ритмы, модели, и конца этому нет, как нет предела совершенствованию — всегда хочется добавить еще один шар. В математике все то же самое: каждый ответ рождает два новых вопроса, и так до бесконечности.

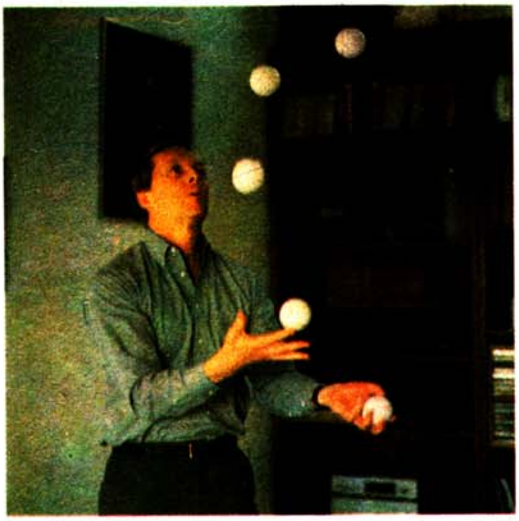
— Что вам больше по душе: разработка теории или решение задач? Идете ли вы от методики к решению задач или в обратном направлении?

— Я отвечу на Ваш вопрос иначе, чем сделал бы это мой коллега, знаменитый венгерский математик П. Эрдеш, который решение задач ставит выше всего остального и разработал сравнительно мало систематических теорий. Я бы сказал так: сначала обычно работаешь над решением конкретной задачи, потом подмечаешь какую-то закономерность. Но как только появляется методика, применимая к решению всех задач данного типа, ее можно развить, и она превращается в теорию.

Область математики, в которой я работаю — комбинаторика. Долгое время ее считали тихой заводью топологии. Лет двенадцать тому назад французский математик Ж. Дьедонне назвал комбинаторику «математикой на завтрак». Думаю, он имел в виду, что это лишь преддверие главного этапа ее развития. Есть и другая крайность: иной раз, говоря о комбинаторике, ее называют «комбинаторной теорией». Как теория, она еще не сравнима с алгебраической топологией или дифференциальной геометрией, хотя в них многие ключевые результаты и носят комбинаторный характер.

Конкретные задачи можно рассматривать как ступени создания методики или теории: если методика хороша для решения данной конкретной задачи, значит исследование идет по верному пути. Здесь возникает и более глубокий вопрос: создана ли математика искусственно или она существует вечно? Большинство математиков, которых я знаю, уверены, что математика в каком-то смысле существовала и раньше, а ученый просто открывает ее для людей. Но тут можно спросить: как же в таком случае быть с музыкой, с Бетховеном? Открыл ли он фортепианную сонату, посвященную Вальдштейну*) или создал ее? Ответ, наверное, можно сформулировать следующим образом: принципы, которые легли в основу сонаты, существовали, но их непосредственное применение, сами ноты — все уже сотворено композитором. То же относится и к математике: мож-





*) Соната № 21 До мажор «Аврора». (*Примеч. перев.*).

но придумать конкретное доказательство, но не его основополагающие принципы. Теория чисел, теорема о разложении на простые множители останутся без изменения и на другой планете. В других областях, например в квантовой механике, наблюдение может изменить или создать наблюдаемое, хотя это и кажется несколько таинственным.

Возвращаясь к вашему вопросу, хочу добавить, что решить конкретную задачу всегда интересно, но это еще не дает полного удовлетворения. Нужно идти дальше: открыть методику гораздо важнее, чем получить отдельный результат.

— Один из наших читателей прислал нам следующую задачу, связанную с гипотезой Эрдеша: n бесконечных арифметических прогрессий покрывает первые 2^{2^n} натуральных чисел; доказать, что они покрывают весь натуральный ряд. Что вы можете сказать про эту задачу?

— Это утверждение, или его вариант с заменой 2^{2^n} на $2n!$, сравнительно несложно доказать по индукции. Но дело в том, что сама гипотеза Эрдеша (в которой вместо 2^{2^n} фигурирует 2^n — и эта оценка уже точная!) доказана Криттенденом и Ван ден Эйденом (1969 г.). Доказательство трудное, о нем коротко не расскажешь.

При решении подобных задач очень важен первый этап — убедиться, справедлива ли гипотеза: вы то пытаетесь строить контрпримеры, то — доказываете какие-то частные случаи, более слабые утверждения или следствия гипотезы; так происходит, пока вы окончательно не обретете уверенность в справедливости того, что доказываете.

— Задачи на арифметические прогрессии связаны с именем Ван-дер-Вардена. Имеются ли хорошие задачи по этой тематике?

— Вот интересная задача, связанная с теоремой Ван-дер-Вардена: Обозначим, в его честь, через $W(k)$ наименьшее натуральное число такое, что при любом разбиении чисел от 1 до $W(k)$ на два класса, хотя бы в одном из них найдется k-членная арифметическая прогрессия. (Ван-дер-Варден доказал, что $W(k)$ существует при любом k.) Легко видеть, что $W(2)=3$, $W(3)=9$; известно еще, что $W(4)=35$, $W(5)=178$, но уже $W(6)$ не найдено даже с помощью компьютера. Я предлагаю гипотезу, что $W(k)$ растет не быстрее, чем «башня» из k двоек $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$. Но есть основания сомневаться даже в этой оценке: есть некоторые похожие комбинаторные задачи, связанные с именем Рамсея, где встречаются функции, растущие еще быстрее. Вы знаете, есть такая широко известная на Западе «Книга рекордов Гинесса». Так вот, там есть «самое большое число, реально использованное в математическом доказательстве». Оно было придумано мной в связи с одной задачей теории Рамсея.

— Одна задача такого «рамсеевского» типа, которой также занимался Эрдеш, недавно обсуждалась в «Кванте»: из какого наименьшего числа $S(k)$ точек на плоскости можно заведомо выбрать k точек, лежащих в вершинах выпуклого k-угольника? Есть гипотеза Секереша, что $S(k)=2^{k-2}+1$. Видимо, надежд на ее доказательство в общем случае пока не прибавилось?

— Да, найти значение $S(k)$ или даже дать хорошие его оценки — видимо, очень трудная задача. Задачу можно варьировать: доказать, что при большом числе точек N среди всех k-угольников с вершинами в этих N точках доля выпуклых составляет не менее C_k, где $C_k>0$ зависит только от k, и пытаться оценивать C_k. А вот еще вариант этой задачи: найти из какого числа $n=f(k)$ точек всегда можно выбрать «пустой» выпуклый k-угольник (т. е. такой, внутри которого больше нет ни одной из этих n точек). Оказывается, такое $f(k)$ существует для $k=3$, 4 и 5, а для $k\geqslant 7$ его просто не существует. Для $k=6$ — никто ничего не знает.

А вообще эту задачу Эрдеш называет «задачей со счастливым концом»: дело в том, что ею вместе с Секерешом увлеклась его аспирантка Эстер Клейн, и все это кончилось тем... что аспирантка стала женой Секереша.

— Могли бы вы сказать что-нибудь об истоках теории Рамсея, привести простые примеры теорем рамсеевского типа?

— В качестве почти шуточного, но типичного примера рамсеевской теоремы приведу такое утверждение:

*среди любых 6 людей всегда существует 3 попарно знакомых или 3 попарно незнакомых.**) Такие теоремы возникали и до Рамсея. Например, есть такая известная теорема И. Шура, доказательство которой, пожалуй, по плечу наиболее подготовленным читателям «Кванта»; *при любой раскраске чисел натурального ряда в два цвета существует монохроматическое решение (x, y, z) диофантового уравнения $x+y=z$* (т. е. решение, составленное из чисел x, y, z одного цвета). Занимаясь более тщательным изучением истории, я пришел к выводу, что впервые теорема рамсеевского типа появлялась в трудах Д. Гильберта в 1892 году.

— Если уж говорить о предыстории теории Рамсея, не кажется ли вам, что следует ее вести не от результатов Шура, а скорее от «принципа ящиков» Дирихле?

— Ну, это уж слишком далекая история, это времена Адама и Евы!

— Есть задачи, которые неожиданно завоевывают популярность. Например, вы, конечно, слышали о такой: начав с некоторого натурального x_0, положим $x_{n+1}=x_n/2$, если x_n четно, и $x_{n+1}=(3x_n+1)/2$, если x_n — нечетно; всегда ли в этой последовательности встретится 1 (после чего она зацикливается)? Недавно школьники принесли нам лист с огромными машинными экспериментами, показывающими, как непредсказуемо поведение этой последовательности. Кажутся ли вам подобные задачи интересными?

— О таких задачах — просто формулируемых, но порой очень сложных,— трудно заранее сказать, есть ли в них какая-либо математическая идея, сложны они или нет, стоит ли на них тратить большие усилия. Но среди задач про «итерации» есть поистине удивительные. Например, вы знаете, как обычно сложно могут вести себя последовательности, задаваемые простыми формулами типа $x_{n+1}=x_n(a-x_n)$. Возьмем такую, более сложную, формулу: $x_{n+2}=(1+x_{n+1})/x_n$. Оказывается (если в ней не встречается 0 или -1), она всегда периодична с периодом 5. А $x_{n+3}=(1+x_{n+1}+x_{n+2})/x_n$ — с периодом 8. Есть ли еще подобные примеры? (Кажется, для линейных выражений в числителе и знаменателе их больше нет, но из многочленов более высокой степени их можно сконструировать.)

Еще пример: положим

$$x_{n+1}=[\sqrt{2x_n(x_n+1)}],\ x_1=1,$$

где [...] — «целая часть»; тогда первые члены будут 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13. Ясно, что x_n растет примерно как $\sqrt{2}n$, так что x_{n+2} примерно вдвое больше x_n. Оказывается, $d_n=x_{2n+1}-2x_{2n+1}$ будет 0 или 1, и если записать их по порядку, то мы получим 1,011010100 ...— в точности двоичную запись $\sqrt{2}$! Для $\sqrt{3}$, например, ничего подобного я уже не знаю.

Последний пример: пусть $\psi_1=2$, $\psi_{n+1}=\psi_n-1/\psi_n$. Будет ли ψ_n неограниченным? Ответ почти наверняка положительный, но никто это не умеет доказать.

— Считаете ли вы, что вычислительная наука, информатика, поглотит математику?

— Это довольно трудный вопрос. Большинство наиболее талантливых ученых в США пользуются компьютерами с самого начала своей научной деятельности. Если их интересуют графы или числа, то на компьютере можно проводить самые разнообразные эксперименты. Играя в компьютерные игры, школьники в США начинают пользоваться компьютерами в возрасте 6—7 лет. Потом круг математических занятий можно расширить с помощью тех же компьютеров.

Ситуация на рынке рабочей силы такова, что спрос на специалистов по вычислительным методам огромен. Поэтому многие талантливые молодые люди рассматривают компьютеры в контексте своей будущей профессии.

Как молодые, так и уже признанные математики приходят к выводу, что вычислительный эксперимент является источником важных и интересных задач. Например, на Международном конгрессе в Беркли результаты трех из шестнадцати пленарных докладов были построены на использовании компьютеров. Работа многих математиков связана с «гиперкубическими машинами». В них входит около 64 000 процессоров, соединенных в топологии 16-мерного куба. Такие машины являются источниками интереснейших математических задач.

Идет нескончаемая дискуссия о том, «поглотит» ли информатика математику или наоборот. Использование в информатике особо сложных математических результатов свидетельствует о большей ее зрелости. Возьмем к примеру Адлемана и Хуанга, которые занимаются доказательством простоты целых чисел с помощью так называемого «криптографического экрана RSA». В своей работе они опираются на глубокие теоретические результаты Фалтингса, получившего в 1986 году медаль Филдса. Если в вычислительной науке используются такого рода сложнейшие результаты алгебраической геометрии, то это значит, что информатика не стоит на месте.

С другой стороны, для того чтобы математика сохраняла свою жизнеспособность, ей нужны настоящие задачи; традиционными же источниками задач являлись физика и астрономия. Замыкаясь в себе, математика становится бесплодной, примером чему служит такая ее ветвь, как теория категорий. В таком случае необходимо вернуться назад, к некогда питавшим математику корням. Сегодня одним из главных источников задач становится вычислительная наука. Но при этом компьютеры не заменили мышления ученого.

В завершении я бы сказал, что взаимоотношения между математикой и вычислительной техникой приобретают характер симбиоза.

— Как один из организаторов Международного конгресса математиков в Беркли (лето 1986 года) и приглашенный докладчик Всемирного конгресса общества Бернулли в Ташкенте (осень 1986 года), не хотели бы вы сказать несколько слов об отношениях между советскими и американскими учеными?

— Как председателю правления организационного комитета конгресса в Беркли, мне было очень приятно, что в нем приняло участие такое значительное число приглашенных докладчиков из Советского Союза — более, чем когда-либо в прошлом. Мы надеемся, что и в дальнейшем эта тенденция сохранится.

На мой взгляд, сотрудничество между советскими и американскими математиками расширяется. В этом плане хорошим признаком можно считать конгресс общества Бернулли в Ташкенте. Это крупнейший форум математиков, состоявшийся в Советском Союзе со времен Международного конгресса математиков 1966 года. Я думаю, что конгресс в Ташкенте прошел успешно.

Конечно, одним из препятствий является элементарный языковой барьер. Американцы печально известны своей неохотой изучать иностранные языки. Поэтому большое значение приобретает эффективный обмен переводными математическими изданиями — книгами, журналами.

В Советском Союзе много сильных математиков. Было бы очень жаль, если их коллеги за рубежом не смогли бы оперативно знакомиться с полученными в СССР результатами. Здесь можно отметить последовательный характер математических исследований. Работа каждого ученого строится на результатах других. Еще Ньютон говорил: «Если мне и удавалось видеть немного дальше других, то лишь потому, что я стоял на плечах гигантов».

Например, большой интерес вызвали результаты советского ученого А. Разборова. Недавно они были улучшены американским математиком Р. Смоленским. Рукопись работы уже передана Разборову, и я уверен, что это существенно ускорит ход его дальнейших исследований. Такого рода мелочи дают порой большие результаты.

Конечно, будут еще препятствия и преграды. Но математики любят трудные задачи. На этот случай бытует поговорка:

Атак те задачи достойны,
Которые держатся стойко.

На будущее я смотрю с большим оптимизмом.